Σύνθετα Δίκτυα

com+plex: with+ -fold (having parts)

Διδάσκων –
Δημήτριος Κατσαρός

Διάλεξη 19η

Submodular functions

Ορισμοί και ασκήσεις

- **Ορισμός 1**. Μια συνάρτηση $f : 2^V \rightarrow R$ είναι *submodular*, εάν, για κάθε S και T με $S \subseteq T \subseteq V$, και για κάθε $v \notin T$:

$$f(S \cup \{v\}) - f(S) \geq f(T \cup \{v\}) - f(T)$$

- **Ορισμός 2**. Μια συνάρτηση $f : 2^V \rightarrow R$ είναι *submodular εάν και μόνο εάν*, για οποιαδήποτε σύνολα S και T:

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$$

Ορισμοί και ασκήσεις

- **Απόδειξη**. Υποθέστε ότι η *f* ικανοποιεί τον Ορισμό 1, και έστωσαν δύο σύνολα S και T υποσύνολα του V. Τότε

$$f((S \cap T) \cup (S/T)) - f(S \cap T) \geq f(T \cup (S/T)) - f(T)$$

Αφού (S∩T) ⊆ T.
Αυτό είναι ισοδύναμο με το f(S) - f(S∩T) ≥ f(S∪T) – f(T), και με αναδιάταξη των όρων προκύπτει ο Ορισμός 2.
Έστω τώρα ότι η f ικανοποιεί τον Ορισμό 2. Έστω ότι τα A και B ικανοποιούν το A⊆B και έστω v ∉ B. Θέτουμε S=A∪{v} και T=B. Τότε ο Ορισμός 2 είναι ισοδύναμος με:

$$f(A \cup \{v\}) + f(B) \geq f(B \cup \{v\}) + f(A)$$

Άσκηση 1

Θεωρήστε μια συλλογή υποσυνόλων $U_1, U_2, \ldots, U_m \subseteq B$. Έστω ότι V={1,..., m} και έστω ότι

$$f(S) = \left| \cup_{i \in S} U_i \right|$$

δηλ., η f(S) να σηματοδοτεί τον αριθμό των στοιχείων του B, τα οποία περιλαμβάνονται στην ένωση των συνόλων που δεικτοδοτούνται από το S. Να δειχθεί ότι η f(S) είναι submodular.

Απόδειξη.

$$f(S \cup \{v\}) - f(S) = \left| \left(\cup_{i \in S} U_i \right) \cup U_v \right| - \left| \cup_{i \in S} U_i \right| = \left| \cap_{i \in S} (U_v \backslash U_i) \right|$$
$$\geq \left| \cap_{i \in T} (U_v \backslash U_i) \right| = f(T \cup \{v\}) - f(T)$$

Άσκηση 2

‘Εστω $\{c_i : i \in V\}$ είναι είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την $f(S)=\max\{c_i : i \in S\}$. Αποδείξτε ότι η f είναι submodular.

Απόδειξη.
Παρατηρήστε ότι για δυο οποιαδήποτε σύνολα S και T, είτε ισχύει ότι $\max\{c_i : i \in S\}=\max\{c_i : i \in S\cup T\}$ είτε $\max\{c_i : i \in T\}=\max\{c_i : i \in S\cup T\}$. Υποθέστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ισχύει η πρώτη από αυτές τις σχέσεις. Τότε:

$$
\begin{aligned}
max_{i\in S} c_i + max_{i\in T} c_i &= max_{i\in S\cup T} c_i + max_{i\in T} c_i \\
&\geq max_{i\in S\cup T} c_i + max_{i\in S\cap T} c_i
\end{aligned}
$$

Mixed topology-based and population-based infection models

Ασκήσεις

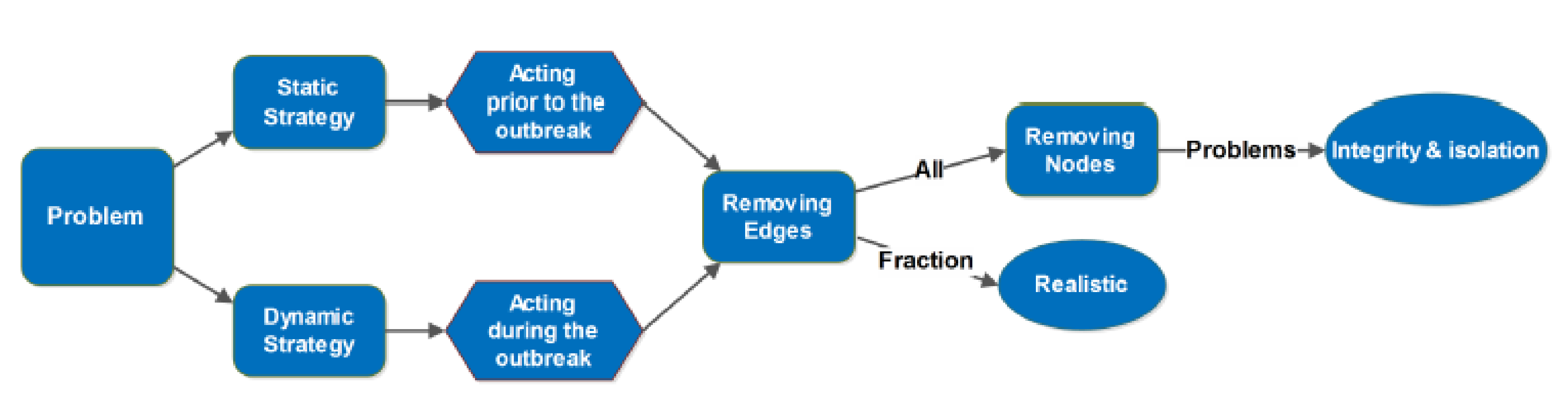
- Είναι προφανές ότι οι infectious diseases μεταδίδονται μόνο δια της προσωπικής επαφής.
- Παράξτε τις διαφορικές εξισώσεις ενός απλοϊκού (και μάλλον εσφαλμένου) SI μοντέλου με τοπολογική γνώση.

Λύση.

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \beta \sum_j A_{i,j}[S_i(t)I_j(t)]$$

Online Influence minimization

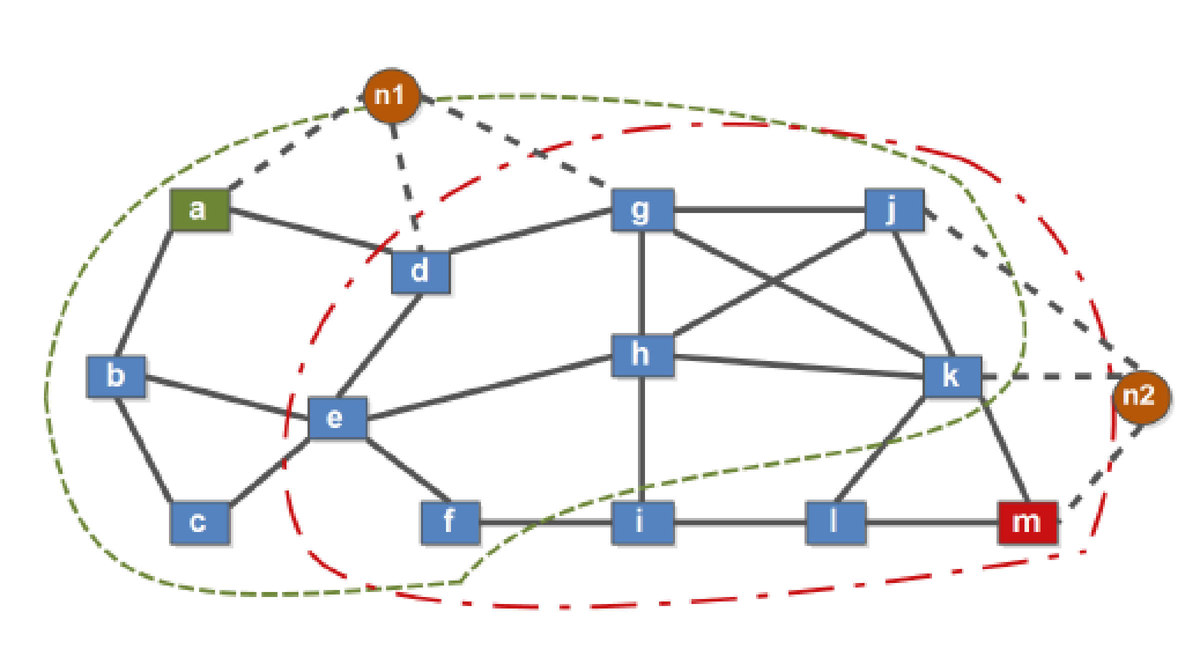
Ασκήσεις



Controlling of epidemics by dynamically choosing which connections to remove as we closely follow the contagion within the diffusion steps.
At each discrete time step a number β of connections may be removed from the network as countermeasures from the authorities.

Σχεδιάγραμμα λύσης.

Ασκήσεις



In the current time step (t) the infected nodes are assumed to be ‘a’ and ‘m’ whereas n1 and n2 are the infected sources of the immediate previous step (t-1) which are now immunized (removed).
The dashed lines correspond to the three hop abstract network images, as seen from the perspective of the current infected sources

Compartmental epidemic models in multiplex networks

Ασκήσεις

Κατασκευάστε ένα υβριδικό (topological-compartmental) SEIR model για ένα multiplex δίκτυο αποτελούμενο από:

- household network layer
- dormitory network layer
- workplace network layer
- crowd network layer (public transportation system, markets)
- social gathering network layer (religious services, academic conferences, large-scale dinner events)

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = -pS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A_{ij}I_j(t) - pS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A^g_{ij}I_j(t) - p_cS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A^c_{ij}I_j(t)$$

$$\frac{dE_i(t)}{dt} = pS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A_{ij}I_j(t) + pS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A^g_{ij}I_j(t) + p_cS_i(t)\sum_{j=1}^{N} A^c_{ij}I_j(t) - \sigma E_i(t)$$

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \sigma E_i(t) - \gamma I_i(t)$$

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = \gamma I_i(t)$$