Σύνθετα Δίκτυα

com+plex: with+ -fold (having parts)

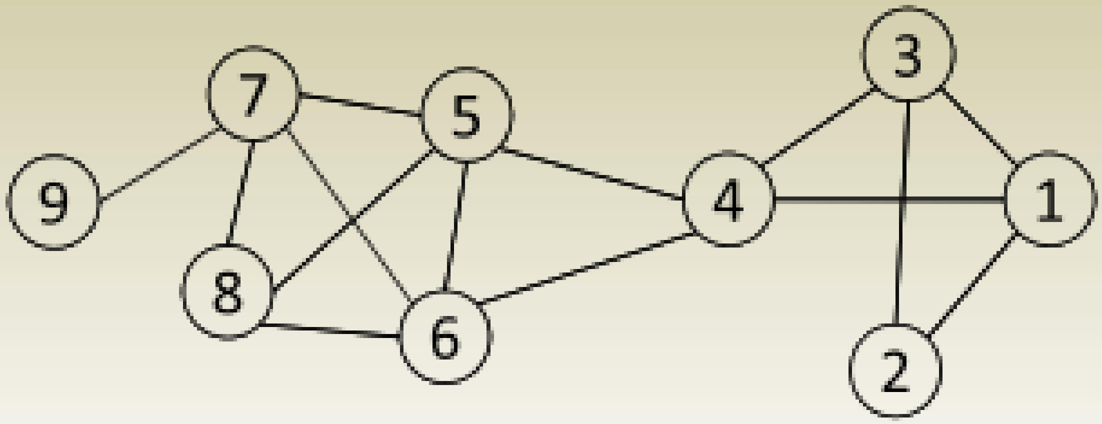
Διδάσκων –
Δημήτριος Κατσαρός

Διάλεξη 12η

Ασκήσεις

- **Άσκηση 1.**

  Να βρεθούν οι δυο κοινότητες του παρακάτω δικτύου με μεγιστοποίηση της modularity.



Ασκήσεις

- **Επίλυση της Άσκησης 1.**

Θυμίζουμε μερικές έννοιες από τον ορισμό της modularity:

Ισχύς κοινότητας: $\sum_{i\in C, j\in C} A_{ij} - d_i d_j/2m$

Modularity: $Q = \frac{1}{2m}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i\in C_\ell, j\in C_\ell}(A_{ij} - d_i d_j/2m)$ ή $B = A - \mathbf{d}\mathbf{d}^T/2m$

Άρα

$$B = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.79 & 0.68 & 0.57 & -0.43 & -0.43 & -0.43 & -0.32 & -0.11 \\ 0.79 & -0.14 & 0.79 & -0.29 & -0.29 & -0.29 & -0.29 & -0.21 & -0.07 \\ 0.68 & 0.79 & -0.32 & 0.57 & -0.43 & -0.43 & -0.43 & -0.32 & -0.11 \\ 0.57 & -0.29 & 0.57 & -0.57 & 0.43 & 0.43 & -0.57 & -0.43 & -0.14 \\ -0.43 & -0.29 & -0.43 & 0.43 & -0.57 & 0.43 & 0.43 & 0.57 & -0.14 \\ -0.43 & -0.29 & -0.43 & 0.43 & 0.43 & -0.57 & 0.43 & 0.57 & -0.14 \\ -0.43 & -0.29 & -0.43 & -0.57 & 0.43 & 0.43 & -0.57 & 0.57 & 0.86 \\ -0.32 & -0.21 & -0.32 & -0.43 & 0.57 & 0.57 & 0.57 & -0.32 & -0.11 \\ -0.11 & -0.07 & -0.11 & -0.14 & -0.14 & -0.14 & 0.86 & -0.11 & -0.04 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

- **Επίλυση της Άσκησης 1 (συνέχεια).**

$$\max Q = \frac{1}{2m} Tr(S^T B S) \quad s.t.\ S^T S = I_k$$

Αλγόριθμος:

1. Υπολογισμός του leading eigenvector του modularity matrix
2. Διαίρεση των κόμβων σύμφωνα με το πρόσημο των στοιχείων του διανύσματος: τα (+) σε μια κοινότητα, και τα (-) στην άλλη κοινότητα

Two Communities:
{1, 2, 3, 4} and {5, 6, 7, 8, 9}

0.4384	-0.2709
0.3809	0.2671
0.4384	-0.2709
0.1716	0.6063
-0.2861	-0.3487
-0.2861	-0.3487
-0.3754	0.3355
-0.3421	0.1855
-0.1396	-0.1552

Ασκήσεις

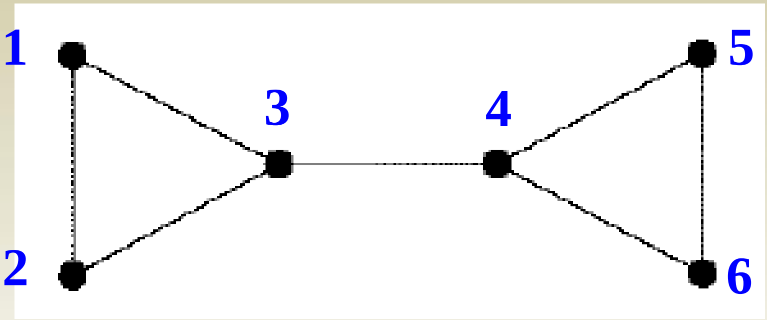
Παρατηρήσεις επί της Άσκησης 1.

- Το διάνυσμα vector (1,1,1,…) είναι πάντα ένα eigenvector του B με eigenvalue zero
- Οι eigenvalues μπορεί να είναι είτε θετικές είτε αρνητικές
  - Όσο υπάρχει τουλάχιστον μια θετική eigenvalue, δεν θα προκύψει η κατάσταση να μπουν όλοι οι κόμβοι σε μια κοινότητα
- Αλλά, μπορεί να μην υπάρχουν θετικές eigenvalues
  - Όλοι οι κόμβοι σε μια κοινότητα: δίνει την μέγιστη modularity
  - Τέτοια δίκτυα καλούνται <u>αδιαίρετα</u> (<u>indivisibles</u>)

Ασκήσεις

- **Άσκηση 2.**

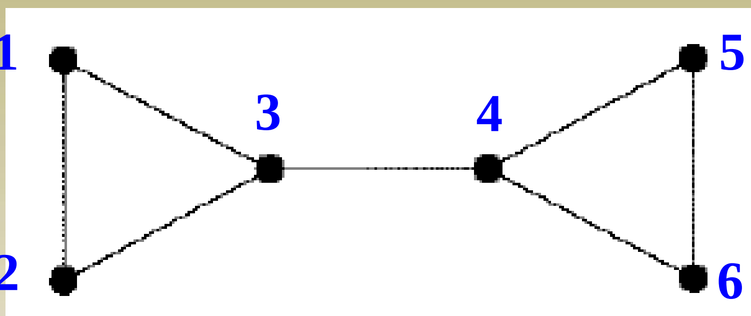
  Κατασκευάστε τον modularity matrix **B** για το ακόλουθο δίκτυο. Κατόπιν διαμερίστε το δίκτυο σε δυο κοινότητες.



Υπόδειξη. Βρείτε το ιδιοδιάνυσμα του **B** που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή, και άρα διαμερίστε το δίκτυο σε δυο κοινότητες.

Ασκήσεις

- **Άσκηση 2. Επίλυση**



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dd^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 9 & 9 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & 9 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dd^T}{2m} = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.28 & 0.42 & 0.42 & 0.28 & 0.28 \\ 0.28 & 0.28 & 0.42 & 0.42 & 0.28 & 0.28 \\ 0.42 & 0.42 & 0.63 & 0.63 & 0.42 & 0.42 \\ 0.42 & 0.42 & 0.63 & 0.63 & 0.42 & 0.42 \\ 0.28 & 0.28 & 0.42 & 0.42 & 0.28 & 0.28 \\ 0.28 & 0.28 & 0.42 & 0.42 & 0.28 & 0.28 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις

- **Άσκηση 2. Επίλυση**

$$B = A - \frac{dd^T}{2m} = \begin{pmatrix} -0.28 & 0.72 & 0.58 & -0.42 & -0.28 & -0.28 \\ 0.72 & -0.28 & 0.58 & -0.42 & -0.28 & -0.28 \\ 0.58 & 0.58 & -0.63 & 0.37 & -0.42 & -0.42 \\ -0.42 & -0.42 & 0.37 & -0.63 & 0.58 & 0.58 \\ -0.28 & -0.28 & -0.42 & 0.58 & -0.28 & 0.72 \\ -0.28 & -0.28 & -0.42 & 0.58 & 0.72 & -0.28 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του $\begin{pmatrix} -0.28 & 0.72 & 0.58 & -0.42 & -0.28 & -0.28 \\ 0.72 & -0.28 & 0.58 & -0.42 & -0.28 & -0.28 \\ 0.58 & 0.58 & -0.63 & 0.37 & -0.42 & -0.42 \\ -0.42 & -0.42 & 0.37 & -0.63 & 0.58 & 0.58 \\ -0.28 & -0.28 & -0.42 & 0.58 & -0.28 & 0.72 \\ -0.28 & -0.28 & -0.42 & 0.58 & 0.72 & -0.28 \end{pmatrix}$ είναι οι:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = \sqrt{3}$$
$$\lambda_3 = -\sqrt{3}$$
$$\lambda_4 = \frac{-\sqrt{561}-19}{100}$$
$$\lambda_5 = \frac{\sqrt{561}-19}{100}$$

Η μεγαλύτερη εξ αυτών είναι η : $\lambda_2 = \sqrt{3}$

Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων έγινε με το εργαλείο: https://matrixcalc.org/en/vectors.html

Ασκήσεις

- **Άσκηση 2. Επίλυση**

General Solution: $X = \begin{pmatrix} -x_6 \\ -x_6 \\ (-\sqrt{3}+1) \times x_6 \\ (\sqrt{3}-1) \times x_6 \\ x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_6 \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ_2 είναι:

Let $x_6 = 1$, $\boxed{\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-\sqrt{3}+1} \\ \mathbf{\sqrt{3}-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}}$

Συνεπώς, αφού οι τρεις πρώτες συντεταγμένες είναι ιδίου προσήμου (αρνητικού), και οι υπόλοιπες τρεις θετικού προσήμου οι κοινότητες είναι: C_1={1,2,3} και C_2={4,5,6}.

Ασκήσεις

- **Άσκηση 3.**

  Κατασκευάστε τον modularity matrix **B** για το ακόλουθο δίκτυο.

Πριν κάνετε οποιονδήποτε υπολογισμό, ποιες πιστεύετε ότι είναι οι κοινότητες που πετυχαίνουν το max modularity;

Βρείτε το ιδιοδιάνυσμα του **B** που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή, και άρα διαμερίστε το δίκτυο σε δυο κοινότητες.