

# HY437 – Αλγόριθμοι CAD

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου

<http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE437/>

I

HY437 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Περιεχόμενα

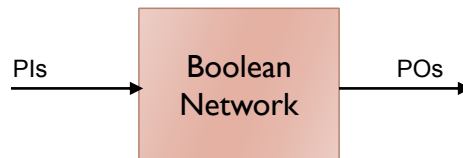
- ▶ Είδη Αδιάφορων Τιμών σε Πολύ-επίπεδα Διαδικτά Δίκτυα
  - ▶ Αδιάφορες Τιμές Εισόδων - Input DCs
  - ▶ Αδιάφορες Τιμές Εξόδων - Output DCs
  - ▶ Τοπικές Αδιάφορες Τιμές Ικανοποίησης – Satisfiability DCs
  - ▶ Τοπικές Αδιάφορες Τιμές Παρατηρησιμότητας – Observability DCs
  
- ▶ Χρήση DC Συνόλου για την πράξη **SIMPLIFY**
- ▶ Παραδείγματα
  
- ▶ Υπολογισμός Συνόλου SDCs
  
- ▶ Υπολογισμός Συνόλου ODCs

▶ 2

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Αδιάφορες τιμές σε Πολύ-επίπεδα Δυναμικά Δίκτυα

- ▶ Οι εξωτερικές και εσωτερικές Αδιάφορες τιμές **προκύπτουν από την ενσωμάτωση των δυναμικών συναρτήσεων του πολύ-επίπεδου Δυναμικού Δικτύου σε ένα περιβάλλον!**
- ▶ Είναι εφικτή και επιθυμητή η επιτόπια βελτιστοποίηση στο συγκεκριμένο περιβάλλον



▶ 3

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Αδιάφορες Τιμές

- ▶ **Satisfiability DCs (SDCs)** – Αδιάφορες τιμές Ικανοποίησης από τις εισόδους
  - ▶ Συνδυασμοί εισόδων που δεν μπορούν να συμβούν και εισόδων/εξόδου μιας πύλης



- ▶ **Observability DCs (ODCs)** – Αδιάφορες τιμές Παρατήρησης στις εξόδους
  - ▶ Συνδυασμοί που φιλτράρονται από τιμές ελέγχου



▶ 4

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Αδιάφορες Τιμές σε Δυναδικά Δίκτυα - SDCs

- ▶ **Ορισμός:** Οι Α.Τ. Ικανοποίησης – SDCs ενός δικτύου  $B$ , είναι το σύνολο των SDCs ( $U$  - ένωση) για κάθε επιμέρους κόμβο  $x$  του δικτύου  $B$ .

$$SDC(G_n(V, E)) = \sum_{x \in V} x \oplus f_x$$

Για κάθε κόμβο  $x$ , το SDC του είναι:

$$SDC_x = \sum_{x'} x \oplus f_{x'}$$

- ▶ Η χρήση της (+) αντιστοιχεί στην λογική διαφορά  $\rightarrow \neq$
- ▶ Το SDC σύνολο εμπεριέχει όλους τους συνδυασμούς τοπικών κόμβων και εισόδων που **ΔΕΝ μπορούν να συμβούν**

▶ 5

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Αδιάφορες Τιμές σε Δυναδικά Δίκτυα - ODCs

- ▶ **Ορισμός:** Η Δυναδική Διαφορά μιας συνάρτησης  $f$ , ως προς μια μεταβλητή  $x$ , καταδεικνύει τις συνθήκες όπου η  $f$  εξαρτάται από την  $x$ :

$$\frac{df}{dx} = f_x \oplus f_{x'}$$

- ▶ **Ορισμός:** Έτσι, οι Α.Τ. Παρατηρησιμότητας για την  $f$  ως προς το  $x$  είναι το αντίστροφο της Δυναδικής Διαφοράς:

$$ODC_x = \overline{\frac{df}{dx}}$$

- ▶ Το ODC σύνολο εμπεριέχει όλους τους συνδυασμούς των εισόδων ή κόμβων που **ΔΕΝ επηρεάζουν τις εξόδους**

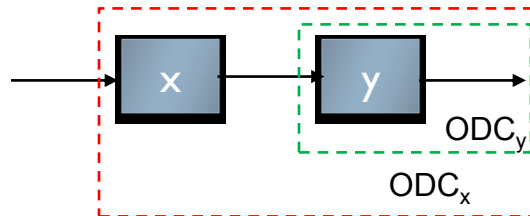
▶ 6

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Αδιάφορες Τιμές σε Δυναδικά Δίκτυα - ODCs

- ▶ Για δυο κόμβους  $x$  και  $y$  σε σειρά ( $x \rightarrow y \rightarrow f$ ) ισχύει ότι:

$$ODC_x = \overline{\frac{df_y}{dx}} + ODC_y$$



- ▶ Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στις συνθήκες του  $x$  που ΔΕΝ είναι παρατηρήσιμες στον κόμβο  $y$ , ενώ ο δεύτερος στις συνθήκες του ίδιου του  $y$ , που δεν είναι παρατηρήσιμος

▶ 7

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Παραδείγματα SIMPLIFY με SDC/ODC

- ▶ Έστω:  $y1 = xw$ ,  $y2 = x' + y$ ,  $F = y1 + y2$  - αναζητούμε απλοποίηση του δικτύου
- ▶ Εξετάζουμε απλοποίηση της  $y1$ , υπολογίζοντας SDC, ODC για το δίκτυο
  - ▶  $SDC_{y2} = y2 (+) (x' + y) = y2x y' + y2' x' + y2' y$
  - ▶ Το  $SDC_{y1}$  δεν βοηθά στην απλοποίηση του  $y1$
  - ▶  $ODC_{y1} = y2$ , λόγω της OR

- ▶ **Κάλυψη ME DCs:**

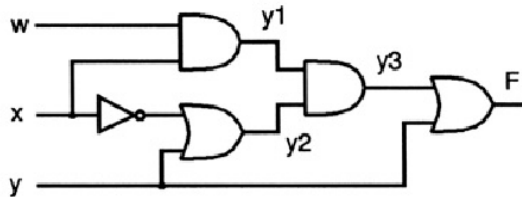
w	x	y2	y1	
1	1	--	1	ON-set
--	--	1	-	ODC
-	1	0	-	SDC
-	0	0	-	SDC
--	1	0	-	SDC

▶ 8

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Παραδείγματα SIMPLIFY με SDC/ODC

- ▶ Με την χρήση του συνδυασμού SDCs, ODCs, η  $y_1$  απλοποιείται σε  $y_1 = w$ !
  - ▶ Χωρίς και τα δυο σύνολα δεν προκύπτει η απλοποίηση!
  - ▶ Π.χ. αν η  $F$  ήταν  $F = y_1 (+) y_2$
- ▶ Έστω:  $y_1 = xw$ ,  $y_2 = x' + y$ ,  $y_3 = y_1y_2$ ,  $F = y_3 + y$  - αναζητούμε απλοποίηση του δικτύου



▶ 9

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Παραδείγματα SIMPLIFY με SDC/ODC

- ▶ Έστω:  $y_1 = xw$ ,  $y_2 = x' + y$ ,  $y_3 = y_1y_2$ ,  $F = y_3 + y$  - αναζητούμε απλοποίηση του δικτύου
- ▶ Εξετάζουμε απλοποίηση της  $y_1$ , υπολογίζοντας SDC, ODC για το δίκτυο
  - ▶  $SDC_{y_2} = y_2xy' + y_2'x' + y_2'y$
  - ▶  $ODC_{y_1} = y_2' + y$ , λόγω των AND και OR =  $x + y$
  - ▶ Άρα η  $y_1$  απαλείφεται καθώς ανήκει στο ODC της  $-wx < x + y!!!$
- ▶ Αν  $F = y_1w + y_2w' + y_1'y_2'$ , επιδείξτε ότι:
  - ▶  $ODC_{y_1} = w'y_2 + wy_2' - \text{ΠΩΣ};$
  - ▶ Υπολογίζοντας το αντίστροφο της Δυαδικής Διαφοράς

▶ 10

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός SDC σε Δίκτυο

- ▶ **Ορισμός:** η ομοφωνία της  $f$  ως προς μεταβλητή  $x$  ορίζεται ως:  $C_x(f) = f|x \cdot f|x'$ 
  - ▶ η  $C_x(f)$  αντιστοιχεί στην συνιστώσα της  $f$  που είναι ανεξάρτητη από την  $x$
- ▶ Για να υπολογίσουμε τα συνολικά SDC του δικτύου  $SDC_{out}$ 
  - ▶ Διατρέχουμε το δίκτυο από τις εισόδους στις εξόδους εξετάζοντας ομάδες από κόμβους την φορά (τομές - cuts)
  - ▶ Σε κάθε τομή – νέο κόμβο: (α) προσθέτουμε τα SDC του κόμβου που εξετάζεται, (β) αφαιρούμε τις μεταβλητές/κόμβους-άμεσους προγόνους μέσω της ομοφωνίας από το SDC set

▶ 11

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός SDC σε Δίκτυο

### Αλγόριθμος SATISFIABILITY(Gn(V, E))

```

SATISFIABILITY(Gn(V, E), CDCin) {
  C = Vi; // PI input nodes //
  CDCcut = CDCin;
  foreach vertex vx in V in topological order {
    C = C ∪ vx; // add vx to cut //
    CDCcut = CDCcut + fx (+) x; // add local SDC set //
    D = {v in C: all successors of v are in C};
    foreach vertex vy in D {
      CDCcut = Cy(CDCcut); // remove nodes vy by taking consensus //
    }
    C = C - D; // drop D from cut //
  }
  CDCout = CDCcut;
  return CDCout;
}

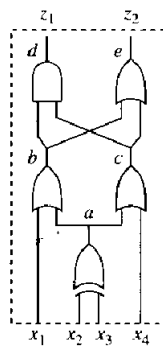
```

- ▶ Ο αλγόριθμος ονομάζεται και CONTROLLABILITY (CDC)
- ▶  $CDC_{in} = SDC_{in}$
- ▶ Το δυσκολότερο βήμα υπολογιστικά είναι η εκτέλεση της πράξης CONSENSUS!

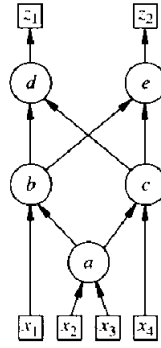
▶ 12

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

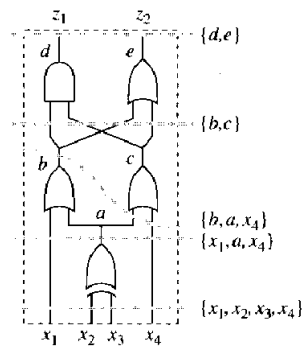
## Υπολογισμός SDC σε Δίκτυο



κύκλωμα



γράφος



τομές - cuts

- ▶ Έστω  $CDC_{in} = x_1' x_4'$
- ▶ Πώς υπολογίζει ο αλγόριθμος το  $SDC_{out}$ ;

▶ 13

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

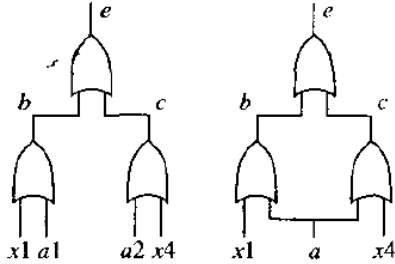
## Υπολογισμός SDC σε Δίκτυο

- ▶ Έστω  $CDC_{in} = x_1' x_4'$
- ▶ Ο πρώτος κόμβος που επιλέγεται είναι ο  $a$
- ▶ Συνδρομή του στο  $CDC_{cut}$ :  $CDC_a = a (+) (x_2 (+) x_3)$
- ▶ Δηλαδή  $CDC_{cut} = x_1' x_4' + a (+) (x_2 (+) x_3)$
- ▶ Οι μεταβλητές  $x_2, x_3$  μπαίνουν στο σύνολο  $D$  για απαλοιφή:  $D = \{x_2, x_3\}$
- ▶  $CDC_{cut} = CONS_{(x_2, x_3)}(CDC_{cut}) = x_1' x_4'$
- ▶ Επιλέγεται ο  $b$ :  $CDC_b = b (+) (x_1 + a), D = \{x_1\}$
- ▶  $CDC_{cut} = CONS_{(x_1)}(CDC_{cut}) = b' x_4' + b' a$
- ▶ Επιλέγεται ο  $c$ :  $CDC_{cut(bc)} = b' c'$
- ▶ Τελικά υπολογίζεται ότι  $CDC_{out} = e' = z_2'$
- ▶ **Δηλαδή η έξοδος  $z_2$  ΔΕΝ θα έχει ποτέ την τιμή μηδέν!**

▶ 14

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός ODC σε Δίκτυο



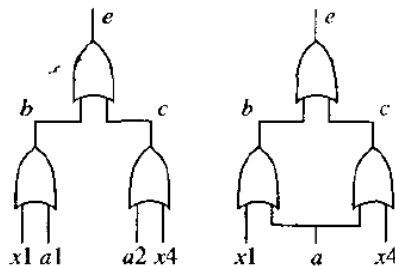
- ▶ Για το κύκλωμα στα αριστερά:
- ▶  $ODC_b = (dfe/db)' = (b + c) |_{b=1} (+)' (b + c) |_{b=0} = c$
- ▶ Ομοίως  $ODC_c = b$
- ▶ Έτσι,  $ODC_{x1} = (dfb/dx1)' + ODC_b = a1 + c = a1 + a2 + x4$
- ▶ Αναλόγως  $ODC_{a1} = c + x1 = x1 + a2 + x4$ ,  
 $ODC_{a2} = b + x4 = x1 + a1 + x4$ ,  
 $ODC_{x4} = b + a2 = x1 + a1 + a2$

▶ 15

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός ODC σε Δίκτυο

- ▶ Κύκλωμα στα δεξιά
  - ▶ Στην περίπτωση **επανασύγκλισης διακλάδωσης (reconvergent fanout)**, έχουμε διαφορετική διάδοση ODC από τα διαφορετικά μονοπάτια
  - ▶ Πως υπολογίζουμε την συνολική συμβολή του  $a$ ;

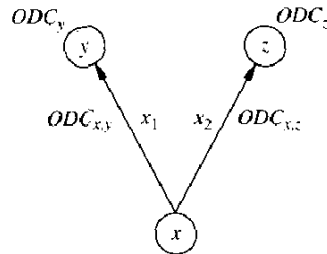


▶ 16

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs



## Υπολογισμός ODC σε Δίκτυο



- ▶ αν αντιγράψουμε τον κοινό κόμβο  $x$  σε  $x_1, x_2$
- ▶ Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ανεξάρτητα  $ODC_{(x,y)}$ ,  $ODC_{(x,z)}$
- ▶ Αποδεικνύεται ότι:
- ▶  $ODC_x = ODC_{(x,y)|x_2 = x} (+) ODC_{(x,y)|x_1 = x'}$   
 $ODC_{(x,y)|x_2 = x'} (+) ODC_{(x,y)|x_1 = x}$

▶ 17

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

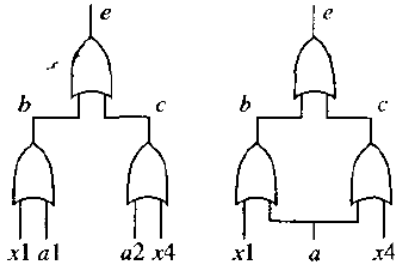
## Θεώρημα ODC για 2 ακμές

- ▶ Ορίζουμε  $f^{x_1, x_2}(\delta_1, \delta_2)$  την μεταβολή της  $f$  αλλάζοντας τις τιμές των μεταβλητών στήριξης,  $x_1, x_2$ .
  - ▶  $x_1$  σχετίζεται με  $(vx, vy)$ ,  $x_2$  με  $(vx, vz)$ , έτσι:
- ▶  $ODC_{x,y} = f^{x_1, x_2}(1, \delta_2) (+) f^{x_1, x_2}(0, \delta_2)$
- ▶  $ODC_{x,z} = f^{x_1, x_2}(\delta_1, 1) (+) f^{x_1, x_2}(\delta_1, 0)$ , και
- ▶  $ODC_x = f^{x_1, x_2}(1, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 0) =$   
**[βάση της πράξης  $\alpha = \alpha (+) 1 = \alpha (+) (b (+) b)$ ]**  
 $f^{x_1, x_2}(1, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 0) (+) [f^{x_1, x_2}(0, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 1)] =$   
 $f^{x_1, x_2}(1, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 1) (+) f^{x_1, x_2}(0, 0) =$   
 $ODC_{x,y}|_{\delta_2=1} (+) ODC_{x,z}|_{\delta_1=0} =$   
 $ODC_{x,y}|_{x_2=x'} (+) ODC_{x,z}|_{x_1=x}$  και ανάλογα λόγω συμμετρίας  
 $ODC_{x,y}|_{x_2=x} (+) ODC_{x,z}|_{x_1=x'}$

▶ 18

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός ODC σε Δίκτυο



► Για το κύκλωμα στα δεξιά:

- $ODC_{a,b} = (dfb/da)' + ODC_b = x1 + c = x1 + a + x4$
- $ODC_{a,c} = (dfc/da)' + ODC_c = x4 + b = x1 + a + x4$
- $ODC_a = ODC_{a,b|a=a'} (+) ODC_{a,c|a=a} = x1 + x4$

► 19

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Γενίκευση Θεωρήματος $ODC_x$ για $n$ ακμές

- **Θεώρημα:** Για  $v_x$  εσωτερικό κόμβο η είσοδο, και διακριτές μεταβλητές  $\{x_i, i = 1, 2, \dots, p\}$  συσχετισμένες με ακμές  $(x, y_i)$ , και  $ODC_{(x,y_i)}$  τα αντίστοιχα σύνολα DC. Το συνολικό ODC για τον κόμβο  $v_x$  υπολογίζεται ως:

$$ODC_x = \bigoplus ODC_{x,y_i} |_{x_{i+1} = \dots = x_p = 1}$$

- Δηλαδή το XNOR (ισότητα) των ODC, με όλους τους συνδυασμούς των επιμέρους σημάτων
  - μεταβλητές μετά το  $(i+1)$ , για κάθε  $i$ , είναι αντεστραμμένες.

► 20

HY524 - Πολυεπίπεδη Λογική Απλοποίηση με  
Αδιάφορες Τιμές - DCs

## Υπολογισμός ODC σε Δίκτυο

### Αλγόριθμος **OBSERVABILITY(Gn(V, E))**

```

OBSERVABILITY(Gn(V, E), ODCout) {
  foreach vertex  $v_x$  in V in reverse topological order {
    for (i = 1 to p) // ODC successors of  $v_x$  //
      ODCx, yi = (dfyi/dx)' + ODCyi; // compute edge (x, yi) ODC //
    for (i = 1 to p)
      ODCx = (+)' ODCx, yi |  $x_{i+1} = \dots = x_p = x'$ ;
  }
  return ODCx;
}

```

- ▶ ODC<sub>out</sub> είναι τα ODC στις εξόδους
- ▶ Το αποτέλεσμα του αλγορίθμου αποτελεί το καθολικό (global) DC για έναν κόμβο
- ▶ Πολυπλοκότητα γραμμική ως προς τον γράφο