HY437 – Αλγόριθμοι CAD

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου

http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE437/

Περιεχόμενα

Σύνολα και Σχέσεις

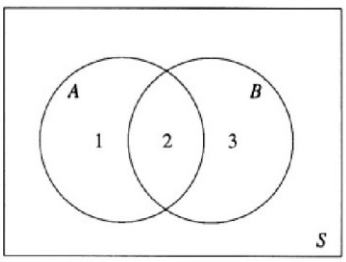
- Ορισμός
  - **Σύνολο** ορίζουμε ένα πλήθος αντικειμένων, τα οποία ονομάζουμε μέλη ή στοιχεία – συμβολίζουμε με {}
- π.χ. {1, 2, 3, 4}, {yes, no}, $\{(x, y) \mid x \in \Re, y \in \Re, x \geq y\}$
  - ο πληθάριθμος (cardinality) ενός συνόλου A, |A|, αντιστοιχεί στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου
- Ορίζουμε κενό σύνολο – **Ø** – το σύνολο χωρίς στοιχεία
- Αν α είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $a \in A$
- Τα στοιχεία των συνόλων προκύπτουν από ένα *σύμπαν* ή ένα *καθολικό σύνολο* **U** (Universal set)
- Έτσι για όλα τα υποσύνολα ενός U μπορούμε να ορίσουμε πράξεις:

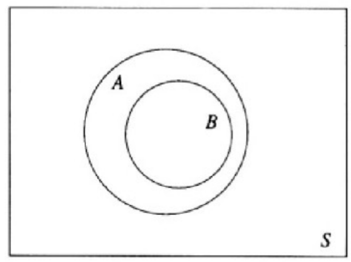
Σύνολα και Σχέσεις – Πράξεις Συνόλων

- Πράξεις:
  - Υποσύνολο (Inclusion) - $\subseteq$: Το σύνολο A εμπεριέχεται στο B, $A \subseteq B$, αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του A ανήκουν και στο B
  - Γνήσιο Υποσύνολο (Inclusion) - $\subset$: Το σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο του B, αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$
  - Συμπλήρωμα (Complement) - ~ ή ' : Το σύνολο όλων των στοιχείων του U που δεν ανήκουν στο A
  - Τομή (Intersection) - $\cap$: Η τομή των A και B, $A \cap B$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στο A και στο B
  - Ένωση (Union) - $\cup$: Η ένωση των A και B, $A \cup B$ είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν είτε στο A, είτε στο B

Σύνολα και Σχέσεις – Πράξεις Συνόλων

- Επιπλέον Πράξεις
  - Διαφορά (-) : Η διαφορά συνόλων A και B, A – B είναι τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B: $A - B = A \cap \overline{B}$
  - Για δυο σύνολα, A και B, ορίζουμε Καρτεσιανό γινόμενο, A X B ως: $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
  - Για A X A γράφουμε και A^2





Σύνολα και Σχέσεις – Σχέσεις

- Ορισμός
  - Για δυο σύνολα, A και B, ορίζουμε δυαδική σχέση (binary relation) *ως ένα υποσύνολο του A X B:*

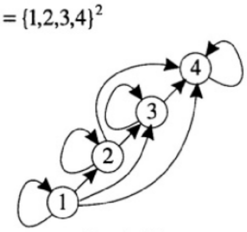
$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \subseteq A \times B$$

  - Ανακλαστικές σχέσεις, $R \subseteq V^2$, ονομάζονται σχέσεις όπου το πεδίο ορισμού και τιμών είναι το ίδιο

$$\leq \subseteq A^2 = \{1,2,3,4\}^2$$

	1	2	3	4
1	≤	≤	≤	≤
2		≤	≤	≤
3			≤	≤
4				≤

MatrixView



Graph View

Σύνολα και Σχέσεις – Σχέσεις

- Ιδιότητες Ανακλαστικών Σχέσεων
  - **Ανακλαστικότητα** (Reflexivity): $R \subseteq A^2$
    - Για κάθε x στο A, ισχύει xRx
  - **Συμμετρία** (Symmetry): $R \subseteq A^2$
    - Για κάθε ζευγάρι (x, y) στην R, το ζευγάρι (y, x) επίσης ανήκει στην R
  - **Αντι-Συμμετρία** (Anti-Symmetry): $R \subseteq A^2$
    - Αν (x, y) και (y, x) ανήκουν στην R, τότε y=x
  - **Μεταβατικότητα** (Transitivity): $R \subseteq A^2$
    - Αν (x, y) και (y, z) ανήκουν στην R, τότε (x, z) ανήκει στην R

Σύνολα και Σχέσεις – Ειδικές Σχέσεις

- Ειδικές Ανακλαστικές Σχέσεις
  - **Σχέση Ισοδυναμίας** (Equivalence Relation): Ανακλαστική, Συμμετρική, Μεταβατική σχέση
    - π.χ. η σχέση = στο σύνολο $\mathbb{N}$
  - **Σχέση Διάταξης** (Partial Order): Ανακλαστική, Αντι-Συμμετρική, Μεταβατική σχέση
    - π.χ. η σχέση <= (σειράς) όταν διατρέχουμε ένα γράφο
  - **Σχέση Συμβατότητας** (Compatibility Relation): Ανακλαστική, Συμμετρική αλλά ΌΧΙ Μεταβατική
    - π.χ. συμβατές καταστάσεις μιας ΜΠΚ (FSM)

Συναρτήσεις

- Μια Συνάρτηση f από το A στο B, f :A→B, είναι μια απεικόνιση του κάθε (ενός) στοιχείου του A στο B
- Έτσι η **Συνάρτηση είναι Σχέση**, όπου το A εμφανίζεται μόνο στο ένα μέλος του ζεύγους
- Για y=f(x):A→B, ονομάζουμε το y ως εικόνα (image) του x, ως προς την f. Δεδομένου ενός πεδίου τιμών, $C \subseteq A$, το σύνολο:
  $$IMG(f, C) = \{y \in B \mid \exists x \in C : y = f(x)\}$$
  ονομάζεται η εικόνα του C ως προς την f
- Μια συνάρτηση ονομάζεται **1-1,** όταν $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$
- Μια συνάρτηση ονομάζεται **επί** (onto), όταν:
  $$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$
- Μια συνάρτηση που είναι 1-1 και επί είναι **αντιστρέψιμη**

Αλγεβρικό Σύστημα

- Μια πράξη *πλήθους n* σε ένα σύνολο A είναι n συνάρτηση f:A^n→A
- Ορισμός
  - Ένα **Αλγεβρικό Σύστημα** είναι ένα μια πλειάδα (tuple) (S, O), όπου S το σύνολο τιμών και O το σύνολο πράξεων
  - π.χ. ({0, 1}, {+, x})
- Η **Δυαδική Άλγεβρα** ορίζεται ως ($\mathbb{B}$, (+, x))
  - Το πεδίο τιμών των μεταβλητών είναι το $\mathbb{B}$
  - Οι πράξεις **(+, x)** έχουν την σημασιολογία των δόκιμων πράξεων **meet** και **join** σε σχέση **≤** και ανάγουν την Δυαδική Άλγεβρα σε Σχέση Διάταξης!

Μέγιστο Κάτω Όριο και Ελάχιστο Πάνω Όριο

- Ορισμός meet, join σε Σχέση ≤
  - Ένα στοιχείο m είναι το meet ή glb (greatest lower bound – μέγιστο κάτω όριο - ΜΚΟ) δυο στοιχείων a, b, όταν: $m \leq a, m \leq b$ και $\forall_{..1'}: m' \leq a, m' \leq b, m' \leq m$
  - Αντιστρόφως για το join
  - Το meet των a, b αντιστοιχεί στο a.b, ενώ το join των a, b στο a + b
- Στην Δυαδική Άλγεβρα για όλα τα στοιχεία της Άλγεβρας, *μεταβλητές και συνδυασμοί τους με πράξεις*, ορίζονται meet, join άρα αντιστοιχεί σε Σχέση Διάταξης ή Πλέγμα (Lattice)

Δυαδική Άλγεβρα

- Το αλγεβρικό σύστημα $\mathbb{B}$ ορίζεται ως ({0, 1}, {+, .})
- Θεμελιώδεις Ιδιότητες

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**	
Αυτοδυναμία	x + x = x	x . x = x
Αντιμετάθεση	x + y = y + x	x . y = y . x
Προσεταιρισμός	x + (y + z) = (x + y) + z	x . (y . z) = (x . y). z
Απορρόφηση	x . (x + y) = x	x + (x .y) = x
Επιμερισμός	x + (y . z) = (x + y)(x + z)	x . (y + z) = (x . y)+(x . z)
Ύπαρξη Αντιστρόφου	Για κάθε Χ υπάρχει Χ’	
Ουδέτερο Στοιχείο	x + 0 = x	x . I = x

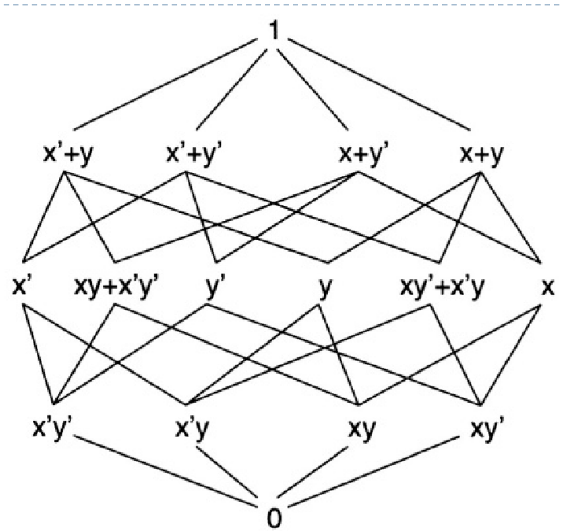
Δυαδική Άλγεβρα

- Επιπλέον Ιδιότητες

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	
Διπλή Άρνηση	(x')' = x	x . x = x
Νόμος De Morgan	(x . y)' = x' + y'	(x + y)' = x'. y'

- Προτεραιότητα τελεστών
  - (), ', ., +

Παράδειγμα Διάταξης δυο Μεταβλητών



Θεμελιώδη Θεωρήματα βάση Σχέσης Διάταξης

- **Θεώρημα 1:**
  - Σε μια Δυαδική Άλγεβρα: $x \leq y \Leftrightarrow xy' = 0$
- **Απόδειξη:** $\Leftrightarrow x' + y = 1$
  - Με αλγεβρικές πράξεις:

    $$x \leq y \Leftrightarrow xy' \leq yy' \Leftrightarrow xy' \leq 0 \Leftrightarrow xy' = 0$$
  - Ομοίως για το συμπληρωματικό
- **Θεώρημα 2– Νόμος De'Morgan:**
  - Σε μια Δυαδική Άλγεβρα: $(x + y)' = x'y'$
- **Απόδειξη:** $(xy)' = x' + y'$
  - Βάση του Θεωρήματος 1 αποδεικνύουμε ότι $(x + y)' \leq x'y'$ και $x'y' \leq (x + y)'$
  - $x'y' \leq (x + y)' \Leftrightarrow x'y'(x + y) = 0$ και ομοίως για το αντίστροφο

Θεμελιώδη Θεωρήματα βάση Σχέσης Διάταξης

- Θεώρημα 3 – Ομοφωνία
  - Σε μια Δυαδική Άλγεβρα: $xy + x'z + yz = xy + x'z$

    $$(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$$
- Απόδειξη
  - Η σχέση $xy + x'z \leq xy + x'z + yz$ ισχύει από τον ορισμό των meet και join
  - Η αντίστροφη ισχύει όταν $yz \leq xy + x'z$ όπου:

    $$yz \leq xy + x'z \Leftrightarrow yz(xy + x'z)' = 0 \Leftrightarrow yz(x' + y')(x + z') = 0$$
  - Το οποίο ισχύει!

Παραδείγματα Απλοποίησης Με Ομοφωνία

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις
  - abc + a’bd + bcd = abc + a’bd
  - abc’d + c’d’e + abc’e = abc’d + c’d’e
  - abe + bce + bde +ac’d’ =
    abe + be(c + d) + a(c + d)’ =
    bce + bde + ac’d’
  - ab’c + bc’d + ad
  - abc’d + abc + adc’ =
    abc’e + abc + adc’ + abe =
    abc + adc’ + abe