ΗΥ430 – Εργαστήριο Ψηφιακών Κυκλωμάτων

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου, Βοηθός: (θα ανακοινωθεί)

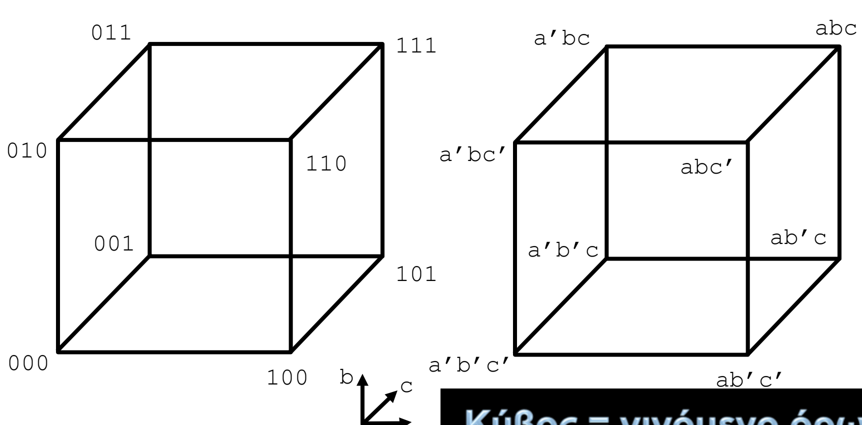
http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE430/

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Τρισδιάστατος Δυαδικός Χώρος

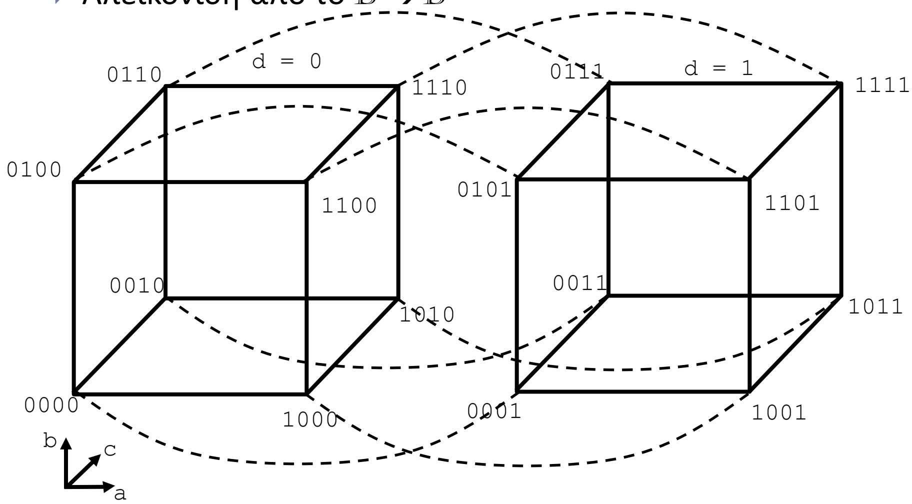
- Απεικόνιση από το $\mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$



Κύβος = γινόμενο όρων

Τετραδιάστατος Δυαδικός Χώρος

- Απεικόνιση από το $\mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$



Περιεχόμενα

Δυαδικές Συναρτήσεις

- Μια απεικόνιση $\mathbb{B}^{\nu} \rightarrow \mathbb{B}$, δηλαδή με πεδίο ορισμού το $\mathbb{B}^{\nu}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{B}$, που περιγράφεται με δυαδική εξίσωση αποτελεί Δυαδική Συνάρτηση
  - f(x1, x2, …, xn)
  - Τα x1, x2, …, xn ονομάζονται στήριξη (support) της f
- Η κάθε δυαδική συνάρτηση, f, αποτελείται απο:
  - f_{ON}, το σύνολο των σημείων στο $\mathbb{B}$ όπου η f έχει την τιμή 1
  - f_{OFF}, το σύνολο των σημείων στο $\mathbb{B}$ όπου η f έχει την τιμή 0
  - f_{DC}, το σύνολο των σημείων στο $\mathbb{B}$ όπου η f έχει την τιμή –
    - Η αδιάφορη τιμή (don't care – DC) – συνεπάγεται επιλογή από {0, 1}
- Έτσι για το σύνολο U = $\mathbb{B}^{\nu}$, **<u>ο καθολικός κύβος</u>**, ισχύει
  - U = f_{ON} U f_{OFF}, και αν υπάρχουν DC, U = f_{ON} U f_{OFF} U f_{DC}

Αναδρομικός Ορισμός Δυαδικών Συναρτήσεων

1. Για κάθε b στο $\mathbb{B}$, δηλαδή {0, 1} η σταθερή συνάρτηση, που ορίζεται ως:
   - f(x1, …, xn) = b, για κάθε (x1, …, xn) στο $\mathbb{B}^{\nu}$
     είναι δυαδική συνάρτηση ν μεταβλητών
2. Για κάθε xi, στο {x1, …, xn}, η συνάρτηση προβολής που ορίζεται ως:
   - f(x1, …, xn) = xi, για κάθε (x1, …, xn) στο $\mathbb{B}^{\nu}$
     είναι δυαδική συνάρτηση ν μεταβλητών
3. Αν g και h δυαδικές συναρτήσεις ν μεταβλητών, τότε οι συναρτήσεις g + h, g . h και g' που ορίζονται ως:
   - (g + h)(x1, …, xn) = g(x1, …, xn) + h(x1, …, xn)
   - (g.h) (x1, …, xn) = g(x1, …, xn) . h(x1, …, xn)
   - (g')(x1, …, xn) = (g(x1, …, xn))'
     είναι δυαδικές συνάρτησεις ν μεταβλητών

- Μόνο οι συναρτήσεις που προκύπτουν από πεπερασμένες εφαρμογές των παραπάνω κανόνων είναι δυαδικές συναρτήσεις

Περιεχόμενα

Θεώρημα Boole / Shannon

- Ορίζουμε:
  - $f|_{xi'} = f|_{xi=0} = f(x1, x2, \ldots, 0, \ldots, xn)$, δηλαδή η f όπου $xi = 0$
  - $f|_{xi} = f|_{xi=1} = f(x1, x2, \ldots, 1, \ldots, xn)$, δηλαδή η f με $xi = 1$
- Τα $f|_{xi'}$, $f|_{xi}$ ονομάζονται
  - $f|_{xi'}$ - αρνητικός συν-παράγοντας (co-factor) της f ως προς το xi,
  - $f|_{xi}$ - θετικός συν-παράγοντας (co-factor) της f ως προς το xi

Θεώρημα Boole/Shannon

- **Θεώρημα Boole/Shannon**
  - Αν f : $\mathbb{B}^v \rightarrow \mathbb{B}$ είναι δυαδική συνάρτηση, τότε:

```
f(x1, …, xi, …, xn) =

 xi’ . f(x1, …, 0, …, xn) + xi . f(x1, …, 1, …, xn) =
 xi’ . f|xi’ + xi . f|xi =

(xi’ + f(x1, …, 1, …, xn))(xi + f(x1, …, 0, …, xn)) =
(xi’ + f|xi)(xi + f|xi’)
```

  - για κάθε `(x1, x2, … xn)` στο $\mathbb{B}$

Απόδειξη Θεωρήματος Boole/Shannon

- Απόδειξη – με επαγωγή
  - Ισχύει για:
    a. Σταθερές συναρτήσεις
    b. Προβολές
  - Επαγωγικό βήμα για g, h. Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για
    a. (g + h)
    b. (g . h)
    c. g’

Περιεχόμενα

Κανονικές Μορφές –Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι

- Με αναδρομική εφαρμογή του θεωρήματος Boole/Shannon προκύπτουν οι δυο κανονικές μορφές

Ανάπτυξη Boole/Shannon με .	**Ιδιότητες**

`f(x1, …, xn-1, xn) =`
 	
`f(0, …, 0, 0) x1' … xn-1' xn'+`
`f(0, …, 0, 1) x1' … xn-1' xn +`
`…`
`f(1, …, 1, 1) x1 … xn-1 xn.`
	- οι αξιολογήσεις της f ονομάζονται διακρίνουσες
	- Τα θεμελιώδη γινόμενα ονομάζονται **<u>ελαχιστόροι</u>**
	- Τα θεμελιώδη αθροίσματα ονομάζονται **<u>μεγιστόροι</u>**

Ανάπτυξη Boole/Shannon με +	

`f(x1, …, xn-1, xn) =`
 	
`[f(0, …, 0, 0) + x1 + … + xn-1 + xn].`
`[f(0, …, 0, 1) + x1 + … + xn-1 + xn'].`
`…`
`[f(1, …, 1, 1) + x1' + … + xn-1' + xn'].`	

Περιεχόμενα

Ομοφωνία και Συνεπαγωγή

- **Ομοφωνία**
  - Στο $\mathbb{B}$ ισχύει:
  - $xy + x'z + yz = xy + x'z$
  - $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$
  - **Απόδειξη – Χρήση Έκφρασης Boole/Shannon**
- **Συνεπαγωγή**
  - Στο $\mathbb{B}$ ισχύει:
  - Το $x \Rightarrow y$ είναι ίσο με $x' + y$
  - $x \Rightarrow y = x' + y$

Περιεχόμενα

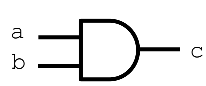
Το Πρόβλημα Ικανοποίησης Εξόδου (Satisfiability)

- Για μια έξοδο δυαδικής συνάρτησης, $\mathbb{B}^\nu \rightarrow \mathbb{B}$, το πρόβλημα ικανοποίησης εξόδου (SAT) είναι η εύρεση μιας, ή περισσότερων τιμών, των εισόδων έτσι ώστε η έξοδος να γίνει αληθής
- Το πρόβλημα SAT είναι εκθετικό (NP) μια και για να βρεθούν ο/οι συνδυασμοί απαιτείται η εξερεύνηση 2^ν συνδυασμών
- Συνήθως το SAT εκφράζεται ως γινόμενο αθροισμάτων

Περιεχόμενα

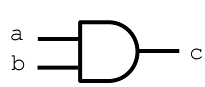
Αδιάφορες Τιμές

- Satisfiability DCs (SDCs) – Αδιάφορες τιμές Ικανοποίησης από τις εισόδους
  - Συνδυασμοί εισόδων που δεν μπορούν να συμβούν και εισόδων/εξόδου μιας πύλης



SDC: c (+) ab

- Observability DCs (ODCs) – Αδιάφορες τιμές Παρατήρησης στις εξόδους
  - Συνδυασμοί που φιλτράρονται από τιμές ελέγχου



ODC: a = 0, b DC
b = 0, a DC

Περιεχόμενα

Ταυτολογία

- Ορίζουμε:
  - Μια συνάρτηση $f(x1, \ldots, xn) = 1$,
    για κάθε $x1, \ldots, xn$ ονομάζεται **ταυτολογία**
- Θεώρημα κάλυψης κύβου
  - Για συνάρτηση f και κύβο c, ισχύει:
    - $c \le f \Leftrightarrow f|c = 1$
- Απόδειξη
  - $c \le f \Leftrightarrow c|c \le f|c \Leftrightarrow 1 \le f|c \Leftrightarrow f|c = 1$
- Θεώρημα Ταυτολογίας
  - $f = 1 \Leftrightarrow f|x = f|x' = 1$
- Δηλαδή, μπορούμε αναδρομικά να διαιρέσουμε την f
  - Αν κάποιο από τα φύλλα δεν καταλήξει σε ταυτολογία τότε η f δεν είναι ταυτολογία

Περιεχόμενα

Ελαχιστοποίηση Διεπίπεδου Κυκλώματος

- Συναρτήσεις Κόστους
  - Αριθμός πυλών
  - Αριθμός εισόδων στις πύλες

  Αριθμός όρων

  - Μέγιστη δυνατότητα δοκιμής
    - Έλεγχος ότι ο κάθε κόμβος μπορεί να τεθεί σε 0 ή 1
    - Δεν είναι δηλαδή κολλημένος στο 1 (s-a-1) ή κολλημένος στο 0 (s-a-0)
- Παράδειγμα προς μελέτη
  - Έξοδοι y1,y2 και εσωτερικός κόμβος y3
  - y1 = x1'x2' + y3
  - y2 = x1x2' + x1'x2
  - y3 = x1x2y2' + x1'x2'

Παράδειγμα

- y1 = x1'x2' + y3
- y2 = x1x2' + x1'x2

- Πως κάνουμε έλεγχο για y2 s-a-0, s-a-1;
  - Βρίσκουμε ένα διάνυσμα που κάνει το y2 μηδέν (αντίστροφη τιμή)
  - Βρίσκουμε διανύσματα που προάγουν την τιμή του y2 για παρατήρηση σε έξοδο

Περιεχόμενα

Επάγοντες Όροι και Πρώτοι Επάγοντες

- Επάγων Όρος (Implicant)
  - Ένας κύβος που ανήκει στον σύνολο ON (ή DC) μιας συνάρτησης f ονομάζεται επάγοντας όρος (implicant)
- Πρώτος Επάγων Όρος (Prime Implicant)
  - Ένας επάγοντας όρος που δεν συμπεριλαμβάνεται σε κανέναν άλλο επάγοντα όρο ονομάζεται πρώτος (prime)
- Παράδειγμα:
  - `f = xy' + xyz,`
    - `xy'` και `xyz` είναι επάγοντες όροι
      - ο `xyz` δεν είναι πρώτος, μια και υπάρχει πρώτος που τον καλύπτει αφαιρώντας την διάσταση `y`
- Αν ένας πρώτος όρος εμπεριέχει ελαχιστόρους που δεν εμπεριέχονται σε κανέναν άλλο πρώτο λέγεται ουσιώδης (essential)

Περιεχόμενα

Ουσιώδης Πρώτος (Essential Prime)- Θεώρημα Quine

- Ουσιώδης Πρώτος Επάγοντας (Essential Prime Implicant)
  - Πρώτος όρος που εμπεριέχει ελαχιστόρους που δεν εμπεριέχονται σε κανέναν άλλο πρώτο
- **<u>Θεώρημα Quine</u>**
  - **Ένα ελάχιστο άθροισμα γινομένων (sop) πάντα αποτελείται από άθροισμα πρώτων επαγόντων όρων**
    - αν ο ορισμός του κόστους συνεπάγεται ότι αύξηση των εμφανίσεων των μεταβλητών αυξάνει το κόστος
- Το παραπάνω θεώρημα είναι το θεμελιώδες θεώρημα της διεπίπεδης βελτιστοποίησης/απλοιποίησης
  - Το κόστος του κάθε πρώτου είναι μια AND ή ο αριθμός των εμφανίσεων των μεταβλητών του

Περιεχόμενα

Υπολογισμός Πρώτων Επαγόντων Όρων

- Ο υπολογισμός υπολογισμού των πρώτων βασίζεται στην δυαδική ιδιότητα: `Xy + Xy' = X`

- **<u>Αλγόριθμος/Μέθοδος Πίνακα</u>**

1. Ξεκινώντας από ελαχιστόρους μεγέθους ν (με ν όρους)
   - Τους διατάσουμε με φθίνοντα αριθμό αρνήσεων
2. Συγχωνεύουμε ανά δύο τους ελαχιστόρους με διαφορά μιας άρνησης (απόσταση 1 στον κύβο) και παράγουμε τον νέο όρο με μια λιγότερη μεταβλητή (ν-1)
3. Σημαδεύουμε τους ελαχιστόρους που καλύπτονται
4. Όταν τελειώσουν οι συνδυασμοί συνεχίζουμε στους (ν-1) όρους από το βήμα 2, μέχρι να μην γίνονται άλλες συγχωνεύσεις
5. Οι πρώτοι είναι οι μη σημαδεμένοι, εναπομείναντες όροι.

Παράδειγμα Εξαγωγής Πρώτων

- Δίνεται:
  - `f = x'y' + wxy + x'yz' + wx'z`
- Εκφράζουμε σε Ελαχιστόρους:
  - `f = w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz' + wxyz' + wxy'z + wxyz`
- Εκφράζουμε το αρχικό στάδιο του πίνακα:

Αριθμός Θετικών Όρων	Ελαχιστόροι
0	w'x'y'z'
1	w'x'y'z, w'x'yz', wx'y'z'
2	wx'y'z, wx'yz'
3	wxyz', wxy'z
4	wxyz

Παράδειγμα Εξαγωγής Πρώτων - Πίνακας

w′x′y′z′ √	w′x′y′ √ w′x′z′ √ x′y′z′ √	x′y′ x′z′
w′x′y′z √ w′x′yz′ √ wx′y′z′ √	x′y′z √ x′yz′ √ wx′y′ √ wx′z′ √	
wx′y′z √ wx′yz′ √	wy′z wyz′	
wxyz′ √ wxy′z √	wxy wxz	
wxyz √		

- Πρώτοι:
  - p1 = x’y’
  - p2 = x’z’
  - p3 = wy’z
  - p4 = wyz’
  - p5 = wxy
  - p6 = wxz

Περιεχόμενα

Αδιάφορες Τιμές στον Πίνακα Εξαγωγής

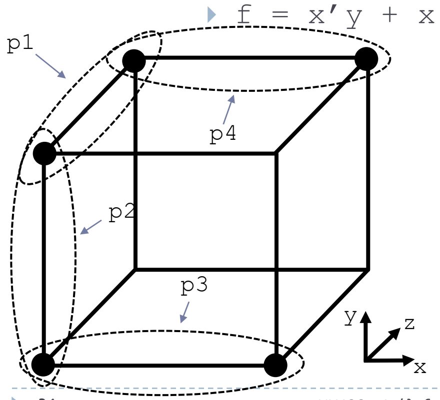
- Σε περίπτωση ελαχιστόρων που έχουν αδιάφορη τιμή (DC) – :
  - Τους συγχωνεύουμε όπως τους υπόλοιπους για να δημιουργήσουμε μεγαλύτερους κύβους (πρώτους)
  - Σημαδεύουμε και αφαιρούμε τους κύβους που αποτελούνται μόνο από DC
- Παράδειγμα: `f = yz' + xy'z` (ON set), `d = x'z` (DC set)

`x'yz'` √
`x'y'z` √ **(DC)**
	`x'y`
	`yz'`
	`x'z` ***(DC)***
	`y'z`

`x'yz` √ **(DC)** `xyz'` √ `xy'z` √	Ο `x'z` απαλείφεται μια και αποτελείται μόνο από DC

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- Έστω:
  - `f = yz + x'y + y'z' + xyz + x'z'`
- Η `f` μπορεί να εκφραστεί από τους πρώτους της ως εξής:
  - `f = x'y + x'z' + y'z' + yz`



- `p1 = x'y`
- `p2 = x'z'`
- `p3 = y'z'`
- `p4 = yz`

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- Αν φτιάξουμε τον **<u>πίνακα περιορισμών</u>** που αντιστοιχεί τους ελαχιστόρους στους πρώτους:

- p1 = x'y
- p2 = x'z'
- p3 = y'z'
- p4 = yz

Ελαχιστόροι	p1	p2	p3	p4
x'y'z'		1	1	
x'yz'	1	1		
x'yz	1			1
xyz				1
xy'z'			1	

- Βλέπουμε ότι οι p3, p4 είναι υποχρεωτικά μέρος της λύσης, αφου μόνοο αυτοί καλύπτουν τους xyz, xy'z'
- Μετά απομένει επιλογή στους p1, p2

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- Αν εκφράσουμε τον κάθε ελαχιστόρο της f ως προς τους πρώτους:
  - Ο κάθε ελαχιστόρος παρουσιάζει επιλογή ως προς το από ποιους πρώτους θα καλυφθεί
    - Λ.χ. ο ελαχιστόρος x'y'z' καλύπτεται από τους p2, p3, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε x'y'z' = (p2 + p3) εκφράζοντας την επιλογή.
- Για να καλύψουμε όλη την f θέλουμε να καλύψουμε όλους τους ελαχιστόρους,
  - Άρα το πρόβλημα επιλογής πρώτων εκφράζεται ως ένα γινόμενο αθροισμάτων, όπου οι (μόνο θετικές) μεταβλητές είναι οι πρώτοι => UCP
  - Για το παράδειγμα: (p2 + p3)p3(p1 + p2)(p1 + p4)p4 = 1

Περιεχόμενα

Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης

- Έστω:
  - $J = \{1, \ldots, n\}$, $p = \{p1, p2, \ldots, pn\}$ σύνολο n δυαδικών μεταβλητών και
  - σi = $\sum_{j \in Ji} pj$, $i = \{1, \ldots, m)$ όπου Ji είναι ένα άθροισμα θετικών όρων των μεταβλητών pj.
- Το <u>**Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης**</u> (Unate Covering Problem – UCP) είναι το πρόβλημα εύρεσης συνόλου S ελαχίστου πλήθους, $S \subseteq$, όπου θέτοντας $pj = 1$, $\forall \; \in$, εγγυάται ότι:

$$\prod_i \sigma \quad p) = 1$$

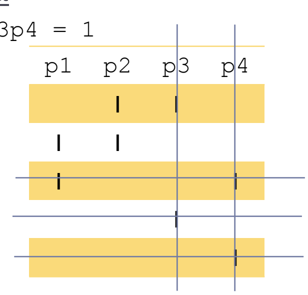
  - Το Κόστος του UCP είναι το πλήθος του S

Περιεχόμενα

Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

1. Απαραίτητες Στήλες

- Αν μια σειρά είναι μονή, δηλ. δεν καλύπτεται από άλλη στήλη, τότε η αντίστοιχη στήλη πρέπει να είναι στην λύση
- Οι αντίστοιχη, απαραίτητη στήλη και οι σχετικές σειρές αφαιρούνται από τον πίνακα
- Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα
  - (p2 + p3)(p1 + p2)(p1 + p4)p3p4 = 1
  - p3 και p4 πρέπει να είναι 1 => απλοποιείται σε (p1 + p2)



Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

2. Απαλοιφή Κατά Σειρά (ή Περιορισμό)

- Αν μια σειρά ri περιέχει όλους τους άσσους μιας άλλης rj τότε η ri κυριαρχεί της rj
- Η σειρά με τους περισσότερους άσσους, η ri, απαλείφεται μια και καλύπτεται πάντα από τους πρώτους της rj
- Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα
  - Βασίζεται στην απορρόφηση: `x(x + y) = x`

- Στον πίνακα δεξιά, η 1η, 4η και 6η σειρά κυριαρχούνε την 2η, 3η και 5η σειρά αντίστοιχα και έτσι απαλείφονται

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				1
2	1	1				
3		1	1			
4		1	1	1		
5				1	1	
6				1	1	1

Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

3. Απαλοιφή Κατά Στήλη

- Αν μια στήλη pi έχει όλους τους άσσους μιας άλλης pj τότε η pi κυριαρχεί της pj
- Η στήλη με τους λιγότερους άσσους, η pj, απαλείφεται μια και η pi καλύπτει όλους τους ελαχιστόρους της pj
- Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα
  - Βασίζεται στην εφαρμογή του αρνητικού συν-παράγοντα των κυριαρχημένων στηλών
    $(p1 + p2)(p2 + p3)(p4 + p5) = p2(p4 + p5)$

p1	p2	p3	p4	p5
1	1			
	1	1		
			1	1

Επίλυση του Πίνακα Περιορισμών του UCP

- Η επίλυση γίνεται με τον εξής Αλγόριθμο:
  1. **Εφαρμόζουμε τις τεχνικές απλοποίησης με την σειρά προτεραιότητας τους, δηλ.:**
     a. Απαραίτητες Στήλες
     b. Κάλυψη κατά Σειρά
     c. Κάλυψη κατά Στήλη
  2. **Στην περίπτωση που ο πίνακας δεν απλοποιείται περαιτέρω αλλά υπάρχει επιλογή στους πρώτους:**
     a. Επιλέγουμε τον πρώτο που φαίνεται να καλύπτει περισσότερους ελαχιστόρους (`px = 1`)
     b. Συνεχίζουμε αναδρομικά στο 1ο Βήμα μέχρι να βρεθεί λύση
     c. Αναλύουμε την λύση χωρίς τον πρώτο που καλύψαμε (`px = 0`), και συγκρίνουμε ποια έχει καλύτερο κόστος

Παράδειγμα 1

Ελαχιστόροι	**p1**	**p2**	**p3**	**p4**
x'y'z'		1	1	
x'yz'	1	1		
x'yz	1			1
xyz				1
xy'z'			1	

- `p3, p4` => απαραίτητες στήλες
  - άρα `p3, p4` είναι μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

Παράδειγμα 1

Ελαχιστόροι	p1	p2	p3	p4
x'y'z'		1	1	
x'yz'	1	1		
x'yz	1			1
xyz				1
xy'z'			1	

- p3, p4 => απαραίτητες στήλες
  - άρα p3, p4 είναι μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- Επιλογή στους p1, p2 (Ίδιο κόστος)
- Λύσεις : {p1, p3, p4}(Κόστους 3), ή {p2, p3, p4} (Κόστους 3)

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- Καμία απλοποίηση
- Επιλέγουμε τον p1
  - έστω λοιπόν p1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- Καμία απλοποίηση
- Επιλέγουμε τον `p1`
  - έστω λοιπόν `p1` μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- Κάλυψη κατά Στήλη
  - Ο `p3` κυριαρχεί τον `p2`, ο `p5` τον `p6`
  - `p5`, `p6` δεν είναι μέρος της λύσης

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- …
- Κάλυψη κατά Στήλη
  - Ο `p3` κυριαρχεί τον `p2`, ο `p5` τον `p6`
  - `p2`, `p6` δεν είναι μέρος της λύσης
- Κάλυψη κατά Σειρά
  - Η 3 καλύπτει την 2, η 4 την 5
  - 3 και 5 απαλοίφονται

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- ...
- Κάλυψη κατά Σειρά
  - Η 3 καλύπτει την 2, η 4 την 5
  - 3 και 5 απαλοίφονται
- Απαραίτητες στήλες p3, p5
- Λύση : {p1, p3, p5} (Κόστος 3)
  - Οι υπόλοιπες λύσεις είναι ισοδύναμες...

Παράδειγμα 3

	1	2	3	4	5	6
1	1		1		1	
2	1			1		1
3		1	1			1
4		1		1	1	

- Επιλέγουμε τον p1
  - έστω λοιπόν p1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

Παράδειγμα 3

	1	2	3	4	5	6
~~1~~	~~1~~		~~1~~		~~1~~	
~~2~~	~~1~~			~~1~~		~~1~~
3		1	1			1
4		1		1	1	

- Επιλέγουμε τον 1
  - έστω λοιπόν 1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- Κάλυψη κατά στήλη
  - Ο 2 κυριαρχεί των 3,4,5,6
- Λύση : {1 , 2}

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Παράδειγμα 4

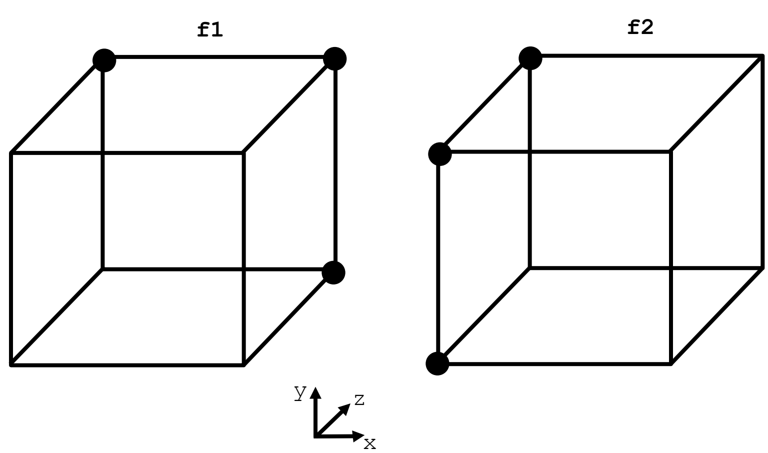
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3											
4											
5											
6											
7											
8											1
9											1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

Λύση: {1, 3, 5, 6, 7} (5)

Περιεχόμενα

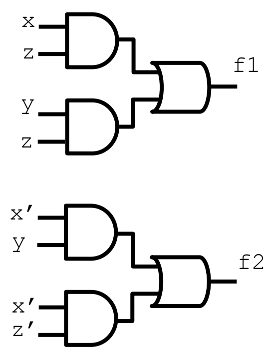
Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

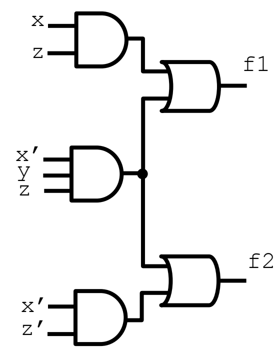
- Θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις:



Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- Χωρίς κοινούς όρους
- Με κοινό όρο





Περιεχόμενα

Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης

- Για να δίνουμε έμφαση στις κοινές εξόδους μπορούμε να αναπαραστήσουμε συναρτήσεις πολλαπλών εξόδων με διάνυσματα
    - Είσοδοι|Έξοδοι
- Παράδειγμα:
    - Η προηγούμενη συνάρτηση πολλαπλών εξόδων `f1f2` μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

xyz	f1f2
1-1	10
011	11
0-0	01

Υπολογισμός Πρώτων Επαγόντων Όρων

- **Αλγόριθμος/Μέθοδος Πίνακα Πολλαπλών Εξόδων**

1. Ξεκινώντας από ελαχιστόρους πολλαπλών εξόδων, μεγέθους ν (με ν όρους)
    - Τους διατάσουμε με φθίνοντα αριθμό αρνήσεων
2. Συγχωνεύουμε ανά δύο τους ελαχιστόρους με διαφορά μιας άρνησης (απόσταση 1 στον κύβο) και παράγουμε τον νέο όρο με μια λιγότερη μεταβλητή (ν-1)
    - Τέμνουμε τους κύβους εξόδου
3. Σημαδεύουμε τους ελαχιστόρους που καλύπτονται, μόνο όταν οι έξοδοι, του πρώτου και του ελαχιστόρου, είναι ίσες
4. Όταν τελειώσουν οι συνδυασμοί συνεχίζουμε στους (ν-1) όρους από το βήμα 2, μέχρι να μην γίνονται άλλες συγχωνεύσεις
5. Οι πρώτοι είναι οι μη σημαδεμένοι, εναπομείναντες όροι.

Παράδειγμα Πίνακα Πρώτων με Πολλαπλές Εξόδους

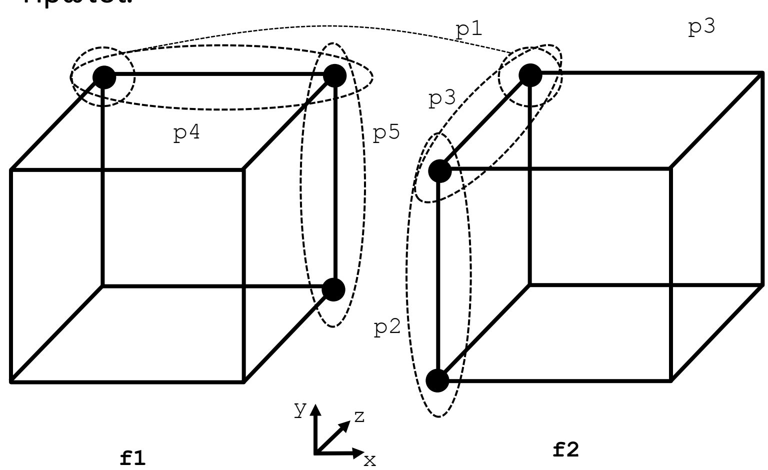
<table>
<tr><td>000|01 √</td><td>0-0|01</td></tr>
<tr><td>010|01 √</td><td>01-|01</td></tr>
<tr><td>011|11
101|10 √</td><td>-11|10
1-1|10</td></tr>
<tr><td>111|10 √</td><td></td></tr>
</table>

- p1 = 011|11
- p2 = 0-0|01
- p3 = 01-|01
- p4 = -11|10
- p5 = 1-1|10

- Στον πίνακα περιορισμών του UCP οι ελαχιστόροι εκφράζονται ως ελαχιστόροι πολλαπλών εξόδων με μια-μία την κάθε έξοδο

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- Πρώτοι:



Παράδειγμα Πίνακα Περιορισμών με Πολλαπλές Εξόδους

		p1	p2	p3	p4	p5
f1	000|01		1			
	010|01		1	1		
	011|01	1		1		
f2	011|10	1			1	
	101|10					1
	111|10				1	1

- Επιλύουμε τον πίνακα περιορισμών με τον ίδιο τρόπο…
  - Λύση: {p1, p2, p5}

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- Η μέθοδος μπορεί να προεκταθεί και για κύβους με DC στις εξόδους,
  - 010|1-
- Στις συγχωνεύσεις:
  - - . 1 = 1
  - - . 0 = 0