

HY437 – Αλγόριθμοι CAD

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου

<http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE437/>

I

HY437 - Διαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Περιεχόμενα

- ▶ Κανονικές Μορφές
- ▶ Ορισμός των Διαδικών Διαγραμμάτων Αποφάσεων (Binary Decision Diagrams – BDDs)
- ▶ Αναπαράσταση Διαδικών Συναρτήσεων με BDDs
- ▶ Κατασκευή Γράφου BDD
- ▶ Απλοποίηση και Πολυπλοκότητα
- ▶ Αλγόριθμοι μεταξύ BDDs – Αλγόριθμος ITE
- ▶ Εφαρμογές BDDs

▶ 2

HY437 - Διαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Κανονικές Μορφές

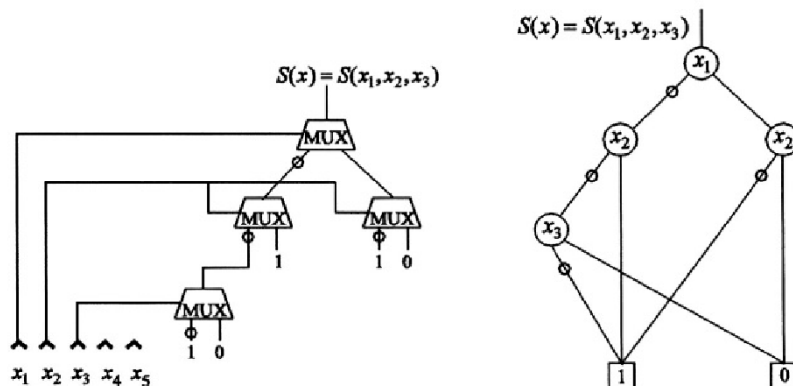
- ▶ Σε εφαρμογές βελτιστοποίησης ή δόκιμης επαλήθευσης εξετάζουμε, αν $(f == g)$, για δυο δυαδικές συναρτήσεις f, g
 - ▶ Στην περίπτωση βελτιστοποίησης μπορεί να εξετάζουμε την εγκυρότητα ενός ευριστικού μετασχηματισμού
 - ▶ Στην περίπτωση δόκιμης επαλήθευσης συγκρίνουμε διαφορετικές μορφές/μετασχηματισμούς του κυκλώματος στην ροή για ορθότητα
- ▶ Πως συγκρίνουμε;
- ▶ **Ορισμός:** μια μορφή ονομάζεται **κανονική** όταν η αναπαράσταση της συνάρτησης είναι **μοναδική**
- ▶ Οι κανονικές μορφές κάνουν την σύγκριση εύκολη!
 - ▶ Κανονικές Μορφές: Ελαχιστόροι, Μεγιστόροι
 - ▶ Μη Κανονικές Μορφές: SOP (Άθροισμα Γινομένων), POS (Γινόμενο Άθροισμάτων)

▶ 3

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Παράδειγμα BDD και σχέση με κύκλωμα με πολυπλέκτες

- ▶ Ο κάθε κόμβος του BDD δεξιά, αντιστοιχεί σε πολυπλέκτη στο κύκλωμα στα αριστερά



▶ 4

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Ορισμός BDDs

- ▶ **Ορισμός - 1:** BDD είναι άκυκλος, κατευθυντικός Γράφος (DAG), $(V \cup \Phi \cup \{I\}, E)$, που αντιπροσωπεύει συνάρτηση πολλαπλών εξόδων F
 - ▶ V είναι το σύνολο εσωτερικών κόμβων, με βαθμό ακμών εξόδων 2
 - ▶ Κάθε v στο V έχει ετικέτα $l(v)$, όπου $l(v)$ ανήκει στην στήριξη της F
 - ▶ Ο κόμβος I είναι ο τερματικός κόμβος
 - ▶ Φ είναι το σύνολο κόμβων συναρτήσεων, με βαθμό ακμών εξόδων 1
 - ▶ Η ακμή εξόδου συνάρτησης μπορεί να έχει ιδιότητα άρνησης
 - ▶ Οι ακμές εξόδου των εσωτερικών κόμβων ονοματίζονται T (Then) ή E (Else) αντίστοιχα – Η ακμή E μπορεί να έχει ιδιότητα άρνησης
 - ▶ Χρησιμοποιούμε $(l(v), T, E)$ για να αναπαραστήσουμε εσωτερικό κόμβο
 - ▶ Οι μεταβλητές στήριξης είναι ταξινομημένες, έτσι ώστε αν η v_i προηγείται της v_j , πρέπει $l(v_i) < l(v_j)$

▶ 5

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Ορισμός BDDs

- ▶ **Ορισμός - 2:** Η αναπαράσταση της συνάρτησης F ως BDD ορίζεται ως εξής:
 1. Η συνάρτηση τερματικού κόμβου είναι η σταθερή I
 2. Η συνάρτηση μιας ακμής αντιστοιχεί στην συνάρτηση του προηγούμενου κόμβου, εκτός αν έχει την ιδιότητα άρνησης
 3. Η συνάρτηση ενός κόμβου v στο V είναι η:

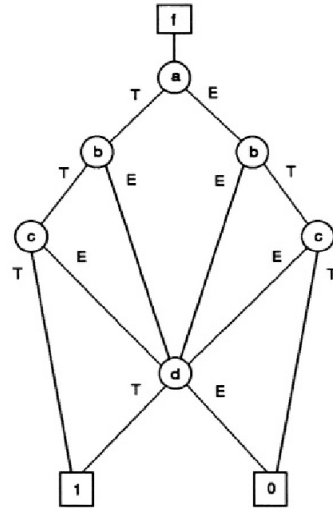
$$l(v) f_T + l(v)' f_E$$
 όπου f_T, f_E είναι οι συναρτήσεις των ακμών T, E αντίστοιχα
 4. Η συνάρτηση φ στο Φ αντιστοιχεί στην συνάρτηση της ακμής εξόδου της

▶ 6

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Παραδείγματα

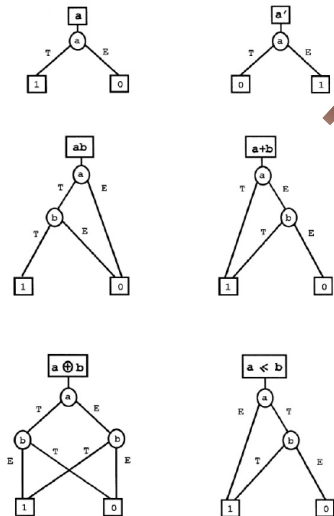
- ▶ Συνάρτηση
 $f = abc + b'd + c'd$
- ▶ Ταξινόμηση εισόδων
 $a < b < c < d$
- ▶ Για κάθε μονοπάτι, η **σειρά των μεταβλητών είναι ίδια!**
- ▶ Για κάθε πιθανή τιμή της στήριξης αξιολογούμε την τιμή του BDD, 0 ή 1



▶ 7

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Παραδείγματα BDD Βασικών Συναρτήσεων



▶ 8

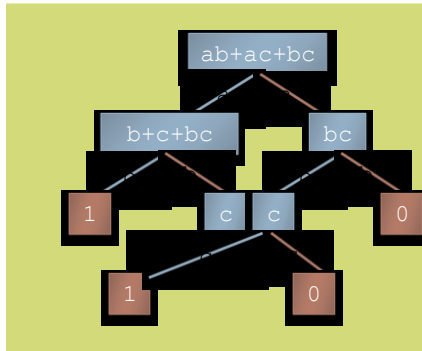
HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Γραμμική Πολυπλοκότητα!

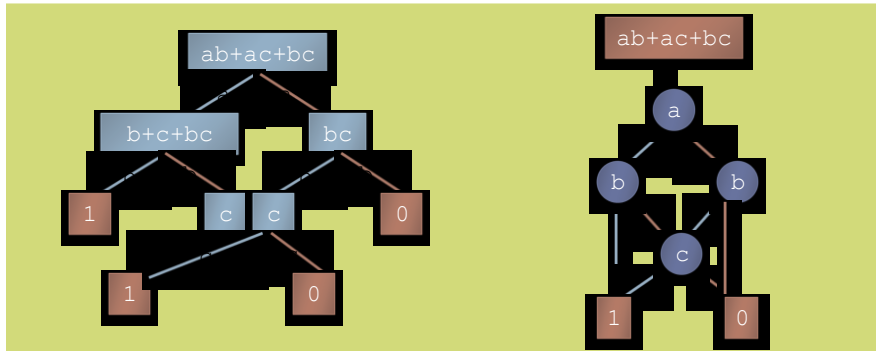
Παράδειγμα

- ▶ $f = ab + ac + bc$
- ▶ Σειρά: $a < b < c$

Δέντρο Shannon



BDD



▶ 9

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων (BDDs)

Κατασκευή BDD για Συνάρτηση f

- ▶ Η κατασκευή BDD για οποιαδήποτε συνάρτηση γίνεται ως εξής:
 - ▶ Καθορίζουμε μια ταξινόμηση των εισόδων
 - ▶ Υπολογίζουμε τους συν-παράγοντες, σύμφωνα με την έκφραση Boole/Shannon (όπως στο δέντρο)
 - ▶ Χρησιμοποιούμε μοναδικούς κόμβους για κάθε ίδιο συν-παράγοντα – αποτέλεσμα (βελτιστοποιούμε το δέντρο Shannon)
 - ▶ Ταυτοποιούμε Ισόμορφους Υπο-γράφους στο Δέντρο
 - ▶ απλοποιούμε σε έναν
 - ▶ Αφαιρούμε περιττούς κόμβους
- ▶ Η σειρά ταξινόμησης των μεταβλητών στήριξης έχει μεγάλη σημασία!!!

▶ 10

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων (BDDs)

Αλγόριθμοι BDDs

▶ Πράξη ITE (If-Then-Else)

$$\text{▶ ITE}(F, G, H) = F \cdot G + F' \cdot H,$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις F, G, H

▶ Η πράξη ITE μπορεί να γίνει αναδρομικά:

$$\text{▶ ITE}(F, G, H) = F \cdot G + F' \cdot H$$

$$= v \cdot (F \cdot G + F' \cdot H)|_v + v' \cdot (F \cdot G + F' \cdot H)|_{v'} =$$

$$= v \cdot (F_v \cdot G_v + F'_v \cdot H_v) + v' \cdot (F_{v'} \cdot G_{v'} + F'_{v'} \cdot H_{v'}) =$$

$$= v \cdot \text{ITE}(F_v, G_v, H_v) + v' \cdot \text{ITE}(F_{v'}, G_{v'}, H_{v'})$$

▶ Το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με κόμβο BDD:

$$\text{▶ } (v, \text{ITE}(F_v, G_v, H_v), \text{ITE}(F_{v'}, G_{v'}, H_{v'}))$$

▶ Συνθήκες Τερματισμού:

$$\text{▶ } \text{ITE}(I, F, G) = \text{ITE}(0, G, F) = \text{ITE}(F, I, 0) = \text{ITE}(G, F, F) = F$$

▶ 11

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Αλγόριθμοι BDDs

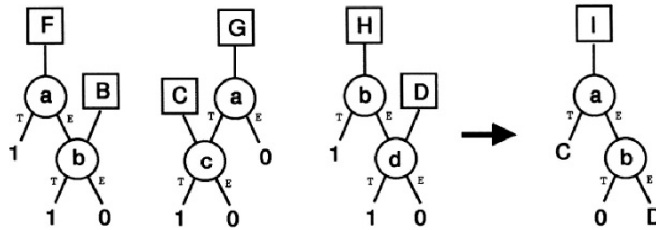
▶ Σύνθεση συναρτήσεων με την πράξη ITE (If-Then-Else):

Name	Expression	Equivalent Form
AND (F, G)	$F \cdot G$	$\text{ITE}(F, G, 0)$
$F > G$	$F \cdot G'$	$\text{ITE}(F, G', 0)$
$F < G$	$F' \cdot G$	$\text{ITE}(F, 0, G)$
XOR (F, G)	$F (+) G$	$\text{ITE}(F, G', G)$
OR (F, G)	$F + G$	$\text{ITE}(F, 1, G)$
NOR (F, G)	$(F + G)'$	$\text{ITE}(F, 0, G')$
XNOR (F, G)	$(F (+) G)'$	$\text{ITE}(F, G, G')$
NOT (F) ή NOT (G)	$G' \text{ ή } F'$	$\text{ITE}(F, 0, 1) \text{ ή } \text{ITE}(G, 0, 1)$
$F \geq G$	$F + G'$	$\text{ITE}(F, 1, G')$
$F \leq G$	$F' + G$	$\text{ITE}(F, G, 1)$
NAND (F, G)	$(F \cdot G)'$	$\text{ITE}(F, G', 1)$

▶ 12

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Σύνθεση με την ITE - Παράδειγμα



$$\begin{aligned}
 I &= \text{ITE}(F, G, H) \\
 &= (a, \text{ITE}(F_a, G_a, H_a), \text{ITE}(F_{a'}, G_{a'}, H_{a'})) \\
 &= (a, \text{ITE}(1, C, H), \text{ITE}(B, 0, H)) \\
 &= (a, C, (b, \text{ITE}(B_b, 0_b, H_b), \text{ITE}(B_{b'}, 0_{b'}, H_{b'}))) \\
 &= (a, C, (b, \text{ITE}(1, 0, 1), \text{ITE}(0, 0, D))) \\
 &= (a, C, (b, 0, D))
 \end{aligned}$$

▶ 13

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Θέματα Υλοποίησης BDDs

▶ Shared BDDs

- ▶ Χρησιμοποιούμε 1 DAG, όπου όλες οι συναρτήσεις έχουν μια ρίζα σε αυτό
- ▶ Έτσι, διακρίνουμε εύκολα κοινές υποσυναρτήσεις

▶ Unique Table

- ▶ “Υπάρχει κόμβος v , με απογόνους G, H ;”
- ▶ Χρησιμοποιούμε πίνακα που αποθηκεύει τον κάθε κόμβο και την αναπαράστασή του σε **dictionary** (με hashing)
- ▶ Strong canonicity
 - ▶ Οι ίσες συναρτήσεις θα μοιράζονται τον ίδιο υπογράφο...

▶ Computed Table (επίσης με hashing)

- ▶ “Υπολογίστηκε πρόσφατα το **AND/OR/...** των f_1, f_2 ;”
- ▶ Για βελτιστοποίηση ταχύτητας χρησιμοποιούμε επιπλέον πίνακα με τις πρόσφατα υπολογισμένες συναρτήσεις

▶ 14

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Αλγόριθμος ITE

Αλγόριθμος ITE

```

ITE(F, G, H) {
  (result, terminal_case) = TERMINAL_CASE(F, G, H);
  if (terminal_case) {
    return (result);
  }
  (result, in_computed_table) = COMPUTED_TABLE_HAS_ENTRY(F, G, H);
  if (in_computed_table) {
    return (result);
  }
  v = TOP_VARIABLE(F, G, H);
  T = ITE(Fv, Gv, Hv); // +ve cofactors of F, G, H //
  E = ITE(Fv', Gv', Hv'); // --ve cofactors of F, G, H //
  if (T == E) return T;
  R = FIND_OR_ADD_UNIQUE_TABLE(v, T, E); // hashing function //
  INSERT_COMPUTED_TABLE((F, G, H), R);
  return R;
}

```

- ▶ Χρησιμοποιούμε hashing για κάθε κόμβο (v, G, H) του BDD για O(1) πολυπλοκότητα εύρεσης υπάρχοντος κόμβου

▶ 15

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)

Εφαρμογές BDDs

- ▶ Αναπαράσταση Δυαδικών Συναρτήσεων
- ▶ Δόκιμη Επαλήθευση
 - ▶ Έλεγχος Ισοδυναμίας
- ▶ Αναπαράσταση FSMs
- ▶ Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις
 - ▶ Αναπαράσταση Χώρου Λύσεων ως Ομάδες Αριθμών

▶ 16

HY437 - Δυαδικά Διαγράμματα Αποφάσεων
(BDDs)