

HY437 – Αλγόριθμοι CAD

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου

<http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE437/>

I

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας

- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης **ESPRESSO**
 - ▶ EXPAND,
REDUCE,
IRREDUNDANT,
ESSENTIALS

- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων **ESPRESSO** με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 2

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ **Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις**
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ **Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO**
 - ▶ EXPAND,
REDUCE,
IRREDUNDANT,
ESSENTIALS
- ▶ **Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων**

▶ 3

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης

- ▶ Η κυβική κωδικοποίηση αντιπροσωπεύει στις θέσεις των όρων τα 0, 1, - από δυαδικό κωδικό:

Σύμβολο	Κωδικοποίηση
ΑΚΥΡΟ	00
0	10
1	01
-	11

- ▶ Διπλασιάζει τις στήλες των κύβων
- ▶ Πράξεις μεταξύ κύβων ορίζονται εύκολα και βολικά στην κωδικοποίηση!
- ▶ Η ύπαρξη του 00 (ΑΚΥΡΟΥ) σε έναν κύβο σημαίνει ότι είναι άκυρος και αφαιρείται!

▶ 4

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης

- ▶ Παράδειγμα: $f = a'd' + a'b + ab' + ac'd$
- ▶ Σε κυβική κωδικοποίηση έχουμε:

a	b	c	d	
10	11	11	10	$a'd'$
10	01	11	11	$a'b$
01	10	11	11	ab'
01	11	10	01	$ac'd$

- ▶ Στην κυβική αναπαράσταση η συνάρτηση είναι σύνολα (λίστα) κύβων και ορίζονται εύκολα πράξεις μεταξύ τους

▶ 5

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης - Πράξεις

- ▶ **Τομή Κύβων:** μεγαλύτερος κύβος που εμπεριέχεται στους δυο: γινόμενο bit προς bit
- ▶ **Υπερκύβος (supercube):** μικρότερος κύβος που εμπεριέχει τους δυο κύβους: άθροισμα bit προς bit
- ▶ **Απόσταση Κύβων:** αριθμός των 00 (άκυρων) πεδίων στην τομή τους – αν η απόσταση είναι 0, οι κύβοι τέμνονται
- ▶ **Κύβος α καλύπτει το β:** όταν το a είναι > (bit προς bit) από το b

▶ 6

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης - Πράξεις

- ▶ Καθολικός Κύβος $U = \text{II II II ... II}$
- ▶ Πράξη $\alpha \# \beta$ (sharp): σύνολο κύβων που καλύπτονται από τον α και όχι από τον β
- ▶ $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$, και $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$

		a_1	b_1'	a_2	...	a_n
▶	$\alpha \# \beta =$	a_1	a_2	b_2'	...	a_n
		a_1	a_2	$a_n \cdot b_n'$
		$a_1 \cdot b_1'$	a_2	a_n
▶	$\alpha (\#) \beta =$	$a_1 \cdot b_1'$	$a_2 \cdot b_2'$	a_n
		$a_1 \cdot b_1'$	$a_2 \cdot b_2'$	$a_n \cdot b_n'$
		$a_1 + b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_n \cdot b_n$
▶	α (consensus) $\beta =$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 + b_2$	$a_n \cdot b_n$
		$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_n + b_n$

▶ 7

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης - Πράξεις

- ▶ Πράξεις σε πίνακες:
 - ▶ Για τις πράξεις $\#$, cons η σειρά έχει σημασία (εξ' ορισμού):
 - ▶ $a \# F = a \# (f_1, f_2, \dots, f_n) = (a \# f_1) \cdot (a \# f_2) \cdot \dots \cdot (a \# f_n)$
 - ▶ $F \# a = (f_1, f_2, \dots, f_n) \# a = (f_1 \# a) + (f_2 \# a) \cdot \dots \cdot (f_n \# a)$
 - ▶ $F \# Q = (f_1, f_2, \dots, f_n) \# (q_1, q_2, \dots, q_n) = ((f_1 \# q_1) + (f_2 \# q_1) + \dots + (f_n \# q_1)) \cdot ((f_1 \# q_2) + (f_2 \# q_2) + \dots + (f_n \# q_2)) \cdot \dots \cdot ((f_1 \# q_n) + (f_2 \# q_n) + \dots + (f_n \# q_n))$
- ▶ **Ομοίως για την ομοφωνία**

▶ 8

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Κυβική Κωδικοποίηση Θέσης - Πράξεις

- ▶ Συν-παράγοντας $\alpha|\beta$, όπου α και β κύβοι
 - ▶ $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$, και $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$
 - ▶ Αν (για κάθε κύβο) η τομή α, β ($\alpha \cdot \beta$) είναι κενή, τότε και το αποτέλεσμα είναι **κενό**, αλλιώς, **αν υπάρχει τομή**:

$$\alpha|\beta = \begin{array}{cccc} a_1 + b_1' & a_2 + b_2' & \dots & a_n + b_n' \end{array}$$

- ▶ π.χ. έστω $f = a'b' + ab$, $\beta = a$ (01 11)

a	b	f	
10	10	a'b'	10 10 x 01 11 = 00 00 → KENO
01	01	ab	01 01 x 01 11 = 01 11 → ΜΗ ΚΕΝΟ

- ▶ έτσι: $\alpha|\beta = 11 01$ (b)

▶ 9

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Σχόλια για τον Συν-παράγοντα $\alpha|\beta$

- ▶ Ο συν-παράγοντας $\alpha|\beta$ έχει τις εξής ιδιότητες:
 - ▶ αν α, β έχουν απόσταση ≥ 1 , τότε $\alpha|\beta = 0$,
π.χ. για 3 εισόδους, $\alpha = xy'z, \beta = x'yz, xy'z|x'yz = 0. 1. 0 = 0$
 - ▶ αν $\alpha \wedge \beta \neq \text{KENO}$ (τομή) τότε:
 - ▶ αν $\alpha \geq \beta$ (εμπεριέχει), τότε $\alpha|\beta = 1$
π.χ. $\alpha = xy, \beta = xyz, \alpha|\beta = 1.1 = 1$

▶ 10

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ **Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO**
 - ▶ EXPAND,
REDUCE,
IRREDUNDANT,
ESSENTIALS
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 11

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Ευριστικός Αλγόριθμος Espresso

Αλγόριθμος ESPRESSO

```
F = EXPAND (F, D);
F = IRREDUNDANT (F, D);
do {
    cost = |F|;
    F = REDUCE (F, D);
    F = EXPAND (F, D);
    F = IRREDUNDANT (F, D);
} while (|F| < cost);
F = MAKE_SPARSE (F, D);
```

- ▶ Τρία βασικά βήματα
 - ▶ (i) Προέκταση (EXPAND) κύβου ως προς τις εισόδους και εξόδους, δηλ. ελάχιστη χρήση όρων (μεγέθυνση κύβων)
 - ▶ (ii) Αφαίρεση Περιττών κύβων (IRREDUNDANT) – κοντά σε τοπικό ελάχιστο!
 - ▶ (iii) Μείωση μεγέθους κύβου (REDUCE) – σκαρφάλωμα (hill-climbing) για διαφυγή από το τοπικό ελάχιστο!

▶ 12

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO
 - ▶ **EXPAND**,
REDUCE,
IRREDUNDANT,
ESSENTIALS
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 13

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Ευριστικός Αλγόριθμος Espresso - EXPAND

- ▶ **EXPAND**
 - ▶ Διεύρυνση του κύβου => μικρότεροι επάγοντες καλύπτονται και αφαιρούνται από την κάλυψη
 - ▶ Μέγιστα διευρυμένοι κύβοι = Πρώτοι
 - ▶ Διεύρυνση:
 - ▶ Ανόρθωση ενός $I, 0$ σε $-$ (ή σε κωδικοποίηση $10, 01$ σε 11)
 - ▶ Εγκυρότητα Ανόρθωσης:
 - ▶ Έλεγχος τομής νέου κύβου με το σύνολο OFF (ESPRESSO)
 - ▶ Έλεγχος ότι ο νέος κύβος καλύπτεται από το σύνολο (ON U DC)
 - ▶ Σειρά Διεύρυνσης Κύβων:
 - ▶ Θέλουμε να διευρύνουμε τους κύβους με μικρότερη τομή με τους υπόλοιπους (έτσι ώστε όταν διευρυνθούν να μην καλύπτονται)
 - ▶ Εξάγουμε Βάρη για κάθε κύβο ως εξής:
 - ▶ Υπολογίζουμε **Διάνυσμα Αθροίσματος των Στηλών (Column Sum Vector)**
 - ▶ Για κάθε κύβο το Βάρος είναι το εσωτερικό γινόμενο ($CSV \times \text{κύβου}$) = $\sum c_{sv_i} \times c_i$
 - ▶ Διευρύνουμε τους κύβους σε **αύξουσα σειρά!**

▶ 14

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

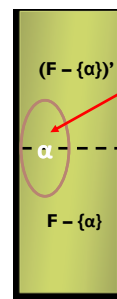
- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO
 - ▶ EXPAND,
 - ▶ REDUCE,
 - ▶ IRREDUNDANT,
 - ▶ ESSENTIALS
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 15

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Ευριστικός Αλγόριθμος Espresso - REDUCE

- ▶ **REDUCE**
 - ▶ Απομείωση του κύβου => ο νέος κύβος πρέπει να καλύπτει την συνάρτηση
 - ▶ Απομειωμένοι κύβοι = Μη Πρώτοι!!!
 - ▶ α είναι επάγοντας της F , και $Q = F \cup F_DC - \{\alpha\}$
 - ▶ Θέλουμε να απομειώσουμε τον α κατά το τμήμα που εμπεριέχεται στο Q , δηλ. $(\alpha \wedge Q')$
 - ▶ $Q'|\alpha$ ελέγχει την κάλυψη του α στο Q'
 - ▶ Q' και $Q'|\alpha$ όμως αποτελείται από πολλαπλούς κύβους
 - ▶ Χρησιμοποιούμε **supercube($Q'|\alpha$)** που παράγει τον μικρότερο κύβο που εμπεριέχει τα στοιχεία του $Q'|\alpha$
 - ▶ Ο απομειωμένος κύβος είναι
 - ▶ $\sim\alpha = \alpha \wedge \text{supercube}(Q') = \alpha \wedge \text{supercube}(\alpha Q'|\alpha + \alpha' Q'|\alpha')$
 $= \alpha \wedge \text{supercube}(Q'|\alpha)$
- ▶ Σειρά Απομείωσης Κύβων - Αντίστροφη μέθοδος από το EXPAND



▶ 16

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO
 - ▶ EXPAND,
 - ▶ REDUCE,
 - ▶ IRREDUNDANT,
 - ▶ ESSENTIALS
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 17

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Ευριστικός Αλγόριθμος Espresso - IRREDUNDANT

- ▶ **IRREDUNDANT**
 - ▶ Απλοποίηση => Απαλοιφή περιττών κύβων
 - ▶ Διαιρούμε τους Επάγοντες σε σύνολα:
 - ▶ **E_r** = Relatively Essential, Σχετικά Ουσιώδεις – περιλαμβάνουν ελαχιστόρους που δεν καλύπτονται από άλλους
 - Διάγνωση: αν α ΔΕΝ εμπεριέχεται στο $Q = F \cup F_DC - \{\alpha\}$, τότε ανήκει στο E_r
 - ▶ **R_t** = Totally Redundant, Απόλυτα Περιττοί – καλύπτονται από τους Σχετικά Ουσιώδεις
 - Διάγνωση: αν α εμπεριέχεται στο $R = E_r \cup F_DC$, τότε ανήκει στο R_t
 - ▶ **R_p** = Partially Redundant, Σχετικά Περιττοί - οι υπόλοιποι
 - **R_p = F - {E_r, U R_{t}}}**
 - Ο κάθε κύβος του R_p μπορεί να ελεγχθεί για αφαίρεση ως εξής:
 - Αν α εμπεριέχεται στο **H = (E_r, U R_p, U F_DC - {α})**
 - ▶ Πρέπει να γίνει παράλληλα και όχι με σειρά! Γιατί;
 - ▶ Λύνουμε πρόβλημα ελάχιστης κάλυψης των κύβων **R_p, H**

▶ 18

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης **ESPRESSO**
 - ▶ EXPAND,
 - ▶ REDUCE,
 - ▶ IRREDUNDANT,
 - ▶ **ESSENTIALS**
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων **ESPRESSO** με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 19

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Ευριστικός Αλγόριθμος Espresso - ESSENTIALS

- ▶ **ESSENTIALS**
 - ▶ Ουσιώδης => καλύπτει ελαχιστόρους που δεν καλύπτονται από άλλους
 - ▶ Για να είναι ουσιώδης, πρέπει να έχει απόσταση ≥ 1 από τους άλλους όρους!
 - ▶ Αν έχει απόσταση ακριβώς 1 με άλλους επάγοντες, και η ομοφωνία του με αυτούς καλύπτουν τους ελαχιστόρους του, ΔΕΝ είναι ουσιώδης!
 - ▶ Αφαιρούμε ελαχιστόρους επάγοντα α από την F
 - ▶ Υπολογίζουμε $G = F \# \alpha$
 - ▶ Αν οι κύβοι της G μπορούν να επεκταθούν να καλύψουν την F
 - ▶ Ο α ΔΕΝ είναι ουσιώδης
 - ▶ να επεκταθούν => $CONSENSUS(G, \alpha)$
 - ▶ Ο α είναι ουσιώδης αν η H δεν καλύπτει τον α
 - ▶ $H = CONSENSUS(F_ON\ U\ F_DC) \# \alpha, \alpha$

▶ 20

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Περιεχόμενα

- ▶ Κυβική Κωδικοποίηση κατά Θέση και Πράξεις
 - ▶ Τομή, Υπερ-κύβος, Απόσταση, Κάλυψη, Συν-παράγοντας
- ▶ Ευριστικός Αλγόριθμος Δι-επίπεδης Βελτιστοποίησης ESPRESSO
 - ▶ EXPAND,
REDUCE,
IRREDUNDANT,
ESSENTIALS
- ▶ Πρακτικά Παραδείγματα Βημάτων ESPRESSO με Πράξεις Κωδικοποιημένων Κύβων

▶ 21

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα EXPAND

- ▶ $F_ON = a'b'c' + ab'c' + a'bc' + a'b'c$, $F_DC = abc'$
- ▶ Σε μορφή κωδικοποίησης θέσης κύβων:

F_ON	12	34	56	w
α	10	10	10	9
β	01	10	10	7
γ	10	01	10	7
δ	10	10	01	7

F_DC	12	34	56
ε	01	01	10

- ▶ $CSV(F_ON) = 313131$
- ▶ Υπολογίζουμε το $F_OFF = U \# F_ON$

F_OFF	12	34	56
ζ	01	11	01
η	11	01	01

- ▶ Ξεκινάμε με β (μικρότερο βάρος)

▶ 22

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα EXPAND

▶ $\beta = 01\ 10\ 10$

▶ Ανόρθωση 0 στην 1^η στήλη: $11\ 10\ 10$

▶ $11\ 10\ 10 \cdot F_OFF = KENO \rightarrow$ έγκυρη

▶ Ανόρθωση 0 στην 4^η στήλη: $11\ 11\ 10$

▶ $11\ 11\ 10 \cdot F_OFF = KENO \rightarrow$ έγκυρη

▶ Ανόρθωση 0 στην 6^η στήλη: 111111

▶ $111111 \cdot F_OFF = 01\ 11\ 01, 11\ 01\ 01$, ΜΗ KENO \rightarrow μη έγκυρη

▶ Έτσι $\beta \sim = 11\ 11\ 10$, που καλύπτει α, γ ($\beta > \alpha, \beta > \gamma$)!

▶ Άρα, η F επικαιροποιείται ως:

F_ON	12	34	56
β	11	11	10
δ	10	10	01

▶ Συνεχίζουμε με δ , και $\delta \sim = 10\ 10\ 11 \rightarrow$ τελική λύση

▶ 23

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα REDUCE

▶ Απομείωση χωρίς/με πράξη supercube (για διαίσθηση)

F_ON	12	34	56
α	11	11	10
β	10	10	11

▶ Ελέγχουμε τον α για απομείωση, σχηματίζουμε $Q = (F - \{\alpha\})$

▶ Σχηματίζουμε το $Q|\alpha$, κάλυψη της Q' από τον α

Q'	12	34	56	Q' α	12	34	56
q1	01	11	11	q1 α	01	11	11
q2	11	01	11	q2 α	11	01	11

▶ Το $Q|\alpha$ έχει πολλαπλούς κύβους, χρειαζόμαστε τον supercube($Q|\alpha$)

▶ $\text{supercube}(Q|\alpha) = 11\ 11\ 11, \alpha \sim = \alpha \wedge \text{supercube}(Q|\alpha) = \alpha$

▶ Δεν γίνεται απομείωση στον α !

▶ Συνεχίζουμε... για τον β , σχηματίζουμε $Q = (F - \{\beta\})$

▶ 24

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα REDUCE

- ▶ Συνεχίζουμε... για τον β , σχηματίζουμε $Q = (F - \{\beta\})$

Q'	12	34	56	$Q' \beta$	12	34	56
$q $	11	11	01	$q \beta$	11	11	01

- ▶ $\text{supercube}(Q'|\beta) = 11\ 11\ 01$, $\beta^{\sim} = \beta \wedge \text{supercube}(Q'|\beta) = 10\ 10\ 01$
- ▶ Άρα, η απομειωμένη F είναι

F_ON	12	34	56
α	11	11	10
β	10	10	01

▶ 25

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα IRREDUNDANT

- ▶ Έστω η κάλυψη:

F_ON	12	34	56
α	10	10	11
β	11	10	01
γ	01	11	01
δ	01	01	11
ϵ	11	01	10

- ▶ Βάση της κάλυψης του α από την $Q = F - \{\alpha\}$ μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\mathbf{Er} = \{\alpha, \epsilon\}$
- ▶ Κατόπιν ελέγχουμε ότι α καλύπτεται από $R = E\gamma$, και βλέπουμε ότι $\mathbf{Rt} = \{\}$
 - ▶ Συνεπώς $\mathbf{Rp} = \{\beta, \gamma, \delta\}$
- ▶ Σχηματίζουμε $H = E\gamma \cup R\beta - \{\alpha\}$, και ελέγχουμε $H|\alpha$ για το \mathbf{Rp} , και τις συνθήκες της ταυτολογίας

▶ 26

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα IRREDUNDANT

- ▶ Ξεκινάμε με τον β (11 10 01)

$H = Er \cup Rp - \{\beta\}$	12	34	56
α	10	10	11
γ	01	11	01
δ	01	01	11
ϵ	11	01	10

- ▶ Και σχηματίζουμε το $H|\beta$:

$H \beta$	12	34	56
$\alpha \beta$	10	11	11
$\gamma \beta$	01	11	11

- ▶ Άρα η συνθήκη κάλυψης του β είναι η $\{\beta, \gamma\}$ και η σχετική γραμμή στον πίνακα κάλυψης είναι [110]
- ▶ Ομοίως, για τους γ, δ προκύπτουν οι γραμμές [111], [011] αντίστοιχα

▶ 27

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα IRREDUNDANT

- ▶ Έτσι, προκύπτει ο πίνακας κάλυψης των πιθανά περιττών Rp :

	β	γ	δ
$H \beta$	1	1	0
$H \gamma$	1	1	1
$H \delta$	0	1	1

- ▶ Επιλύουμε το UCP $\rightarrow \Lambda = \{\gamma\}$, συνεπώς $Rp = \{\gamma\}$, και F απλοποιείται ως:

F_{ON}	12	34	56
α	10	10	11
γ	01	11	01
ϵ	11	01	10

▶ 28

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα ESSENTIALS

- ▶ Έστω η κάλυψη:

F_ON	12	34	56
α	10	10	11
β	11	10	01
γ	01	11	01
δ	01	01	11

- ▶ Ελέγχουμε τον α για ουσιώδη, σχηματίζοντας $G = F\#α$
- ▶ $G = α\#α + β\#α + γ\#α + δ\#α = (01\ 11\ 01, 01\ 01\ 11)$
- ▶ $H = \text{consensus}(G, α) = (01\ 11\ 01) \text{ cons } α + (01\ 01\ 11) \text{ cons } α$

12	34	56		12	34	56	
11	10	01	+	11	00	11	
00	10	01		00	11	11	= 11 10 01, H α = 11 11 01
00	10	11		00	00	11	

- ▶ Συνεπώς $H|α$ ΔΕΝ είναι ταυτολογία, άρα α απαραίτητος.

▶ 29

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα ESSENTIALS

- ▶ Ελέγχουμε τώρα τον β για ουσιώδη, σχηματίζοντας $G = F\#β$

- ▶ $G = α\#β + β\#β + γ\#β + δ\#β = (10\ 10\ 10, 01\ 01\ 11)$

- ▶ $H = \text{consensus}(G, α) =$

12	34	56
10	10	11
01	11	01

- ▶ Και $H|β =$

12	34	56
10	11	11
01	11	11

- ▶ Συνεπώς $H|β$ ΕΙΝΑΙ ταυτολογία, άρα ο β δεν είναι απαραίτητος!

▶ 30

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα ESPRESSO με πολλαπλές εξόδους - EXPAND

▶ Έστω:

▶ $F1 = x'y'z' + xz' + xy$, και
 $F2 = x'y'z' + x'yz + xy + xy'z$

▶ Σε κυβική αναπαράσταση και κυβική κωδικοποίηση θέσης:

xyz	f1f2	F_ON	12	34	56	f1f2	w
000	10	α	10	10	10	10	12
1-0	10	β	01	11	10	10	17
11-	10	γ	01	01	11	10	17
000	01	δ	10	10	10	01	12
011	01	ε	10	01	01	01	11
11-	01	ζ	01	01	11	01	17
101	01	η	01	10	01	01	12
		CSV	34	44	54		

▶ 31

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
 Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα ESPRESSO με πολλαπλές εξόδους - EXPAND

▶ Υπολογίζουμε $f1_{OFF}$, $f2_{OFF}$:

▶ $f1_{OFF} = U \# f1 = (11 \ 11 \ 11) \#$

12	34	56
10	10	10
01	11	10
01	01	11

 =

[ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΟΥΜΕ
 $\alpha \# F = (\alpha \# f1) \cdot (\alpha \# f2) \dots (\alpha \# fn)$]

12	34	56	x	12	34	56	x	12	34	56	=
01	11	11		10	11	11		10	11	11	
11	01	11		11	00	11		11	10	11	
11	11	10		11	11	01		11	11	00	

$f1_{OFF} =$	12	34	56	$x'y$	$f2_{OFF} =$	12	34	56	$x'y'z'$
	10	01	11	$x'z$		10	01	10	$xy'z'$
	10	11	01			01	10	10	$x'y'z$
	11	10	01			10	10	01	

▶ Ομοίως για το $f2_{OFF}$

▶ 32

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
 Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα ESPRESSO με πολλαπλές εξόδους - EXPAND

- ▶ Εξετάζουμε επέκταση του ϵ (μικρότερο βάρος), $\epsilon \sim = 11\ 01\ 01|01$
- ▶ Ελέγχουμε τομή με το OFF SET της $f2$,
δηλ. $(11\ 01\ 01) \cdot f2_{OFF} =$

$$(11\ 01\ 01) \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 34 & 56 \\ \hline 10 & 01 & 10 \\ \hline 01 & 10 & 10 \\ \hline 10 & 10 & 01 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 34 & 56 \\ \hline 10 & 01 & 00 \\ \hline 01 & 00 & 00 \\ \hline 10 & 00 & 01 \\ \hline \end{array} = \text{KENH!}$$

- ▶ Άρα η επέκταση του ϵ σε $\epsilon \sim$ είναι έγκυρη
- ▶ Εξετάζουμε επέκταση του δ σε $\delta \sim = 10\ 10\ 10|11$ (πολλαπλών εξόδων)
 - ▶ Δεν χρειάζεται έλεγχος με το OFF SET μια και οι (α, δ) συγχωνεύονται σε $\delta \sim$
- ▶ Εξετάζουμε επέκταση του α σε $\alpha \sim = 11\ 10\ 10|01$ με την ίδια διαδικασία
- ▶ Βλέπουμε ότι η τομή με το OFF SET είναι επίσης KENH, άρα έγκυρη.

▶ 33

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Πολύπλοκο Παράδειγμα ESPRESSO IRREDUNDANT

- ▶ Έστω η συνάρτηση F:

F_ON	12	34	56
α	11	01	01
β	10	11	01
γ	10	10	11
δ	11	10	10
ϵ	01	11	10
ζ	01	01	11

- ▶ Βήμα 1^ο - Ελέγχουμε για τα σύνολα **Er, Rp, Rt**.
- ▶ $Q = F - \{\alpha\}$, και υπολογίζουμε $Q|\alpha = (10\ 11\ 11, 01\ 11\ 11)$ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ, άρα α ανήκει στο R_p
- ▶ Ομοίως για το β , και για τους υπόλοιπους κύβους.
- ▶ Βήμα 2^ο - Σχηματίζουμε $H = E_r \cup R_p - \{\zeta\}$, για τους κύβους του R_p και εξετάζουμε τις καθολικές συνθήκες ταυτολογίας στον πίνακα κάλυψης H

▶ 34

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση

Πολύπλοκο Παράδειγμα ESPRESSO IRREDUNDANT

- ▶ Για τον σχηματισμό του πίνακα:
- ▶ $H|\alpha = \{\beta, \zeta\}$, $H|\beta = \{\alpha, \gamma\}$, $H|\gamma = \{\beta, \delta\}$, $H|\delta = \{\gamma, \epsilon\}$, $H|\epsilon = \{\delta, \zeta\}$, $H|\zeta = \{\alpha, \epsilon\}$
- ▶ Έτσι, συνολικά (προσθέτουμε και τον ίδιο κύβο στην συνθήκη) :
- ▶ $H|\alpha = \alpha + \beta\zeta = (\alpha + \beta)(\alpha + \zeta)$, ομοίως και για τα υπόλοιπα

	α	β	γ	δ	ϵ	ζ
$H \alpha_1$						
$H \alpha_2$						
$H \beta_1$						
$H \beta_2$						
$H \gamma_1$						
$H \gamma_2$						
$H \delta_1$						
$H \delta_2$						
$H \epsilon_1$						
$H \epsilon_2$						
$H \zeta_1$						
$H \zeta_2$						

- ▶ Οι μισές σειρές του πίνακα απαλείφονται λόγω κάλυψης
 - ▶ λ.χ. $H|\beta_2 = H|\gamma_1 = H|\gamma_2 \dots$
- ▶ $\Lambda = \{\alpha, \gamma, \epsilon\} = \mathbf{Rp}$
- ▶ Άρα η F απλοποιείται σε:
 - ▶ $F = \{\alpha, \gamma, \epsilon\}$

▶ 35

HY437 - Κυβική Αναπαράσταση/Πράξεις,
Ευριστική Δι-επίπεδη Βελτιστοποίηση