

HY437 – Αλγόριθμοι CAD

Διδάσκων: Χ. Σωτηρίου

<http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE437/>

I

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 2

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

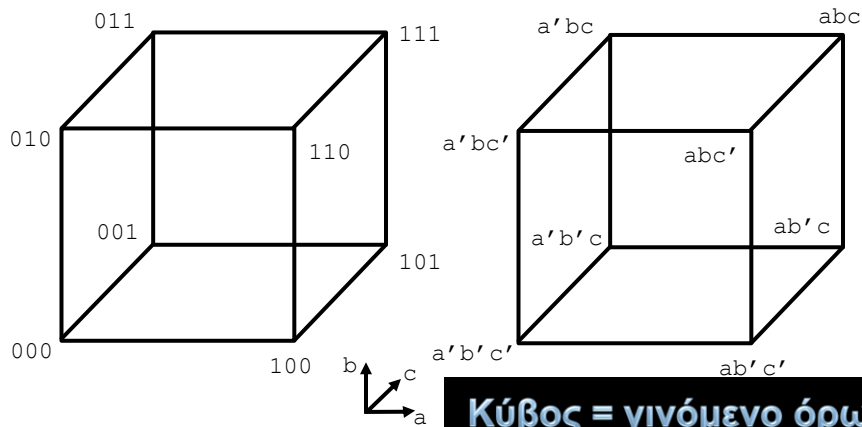
- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 3

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Τρισδιάστατος Δυαδικός Χώρος

- ▶ Απεικόνιση από το $B^3 \rightarrow B$

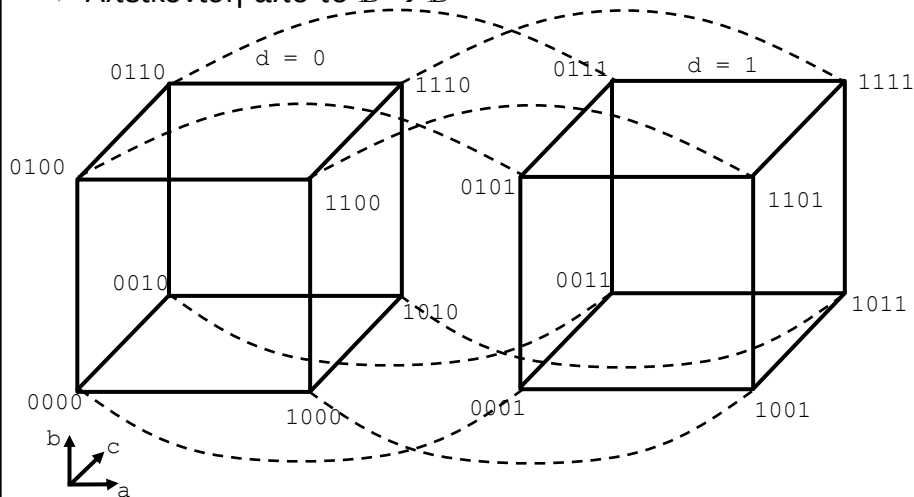


▶ 4

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Τετραδιάστατος Δυαδικός Χώρος

▶ Απεικόνιση από το $B^4 \rightarrow B$



▶ 5

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ **Δυαδικές Συναρτήσεις**
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 6

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Δυαδικές Συναρτήσεις

- ▶ Μια απεικόνιση $B^v \rightarrow B$, δηλαδή με πεδίο ορισμού το B^v και πεδίο τιμών το B , που περιγράφεται με δυαδική εξίσωση αποτελεί Δυαδική Συνάρτηση
 - ▶ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - ▶ Τα x_1, x_2, \dots, x_n ονομάζονται στήριξη (support) της f
- ▶ Η κάθε δυαδική συνάρτηση, f , αποτελείται απο:
 - ▶ f_{ON} , το σύνολο των σημείων στο B όπου η f έχει την τιμή 1
 - ▶ f_{OFF} , το σύνολο των σημείων στο B όπου η f έχει την τιμή 0
 - ▶ f_{DC} , το σύνολο των σημείων στο B όπου η f έχει την τιμή –
 - ▶ Η αδιάφορη τιμή (don't care – DC) – συνεπάγεται επιλογή από $\{0, 1\}$
- ▶ Έτσι για το σύνολο $U = B^v$, **ο καθολικός κύβος**, ισχύει
 - ▶ $U = f_{ON} \cup f_{OFF}$ και αν υπάρχουν DC, $U = f_{ON} \cup f_{OFF} \cup f_{DC}$

▶ 7

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Αναδρομικός Ορισμός Δυαδικών Συναρτήσεων

1. Για κάθε b στο B , δηλαδή $\{0, 1\}$ η σταθερή συνάρτηση, που ορίζεται ως:
 - ▶ $f(x_1, \dots, x_n) = b$, για κάθε (x_1, \dots, x_n) στο B^v
είναι δυαδική συνάρτηση n μεταβλητών
2. Για κάθε x_i στο $\{x_1, \dots, x_n\}$, η συνάρτηση προβολής που ορίζεται ως:
 - ▶ $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, για κάθε (x_1, \dots, x_n) στο B^v
είναι δυαδική συνάρτηση n μεταβλητών
3. Αν g και h δυαδικές συναρτήσεις n μεταβλητών, τότε οι συναρτήσεις $g + h$, $g \cdot h$ και g' που ορίζονται ως:
 - ▶ $(g + h)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$
 - ▶ $(g \cdot h)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$
 - ▶ $(g')(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1, \dots, x_n))'$
είναι δυαδικές συναρτήσεις n μεταβλητών
- ▶ Μόνο οι συναρτήσεις που προκύπτουν από πεπερασμένες εφαρμογές των παραπάνω κανόνων είναι δυαδικές συναρτήσεις

▶ 8

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ **Θεώρημα Boole/Shannon**
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 9

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Θεώρημα Boole/Shannon

- ▶ Ορίζουμε:
 - ▶ $f|_{x_i'} = f|_{x_i = 0} = f(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n)$,
δηλαδή η f όπου $x_i = 0$
 - ▶ $f|_{x_i} = f|_{x_i = 1} = f(x_1, x_2, \dots, 1, \dots, x_n)$,
δηλαδή η f με $x_i = 1$
- ▶ Τα $f|_{x_i'}$, $f|_{x_i}$ ονομάζονται
 - ▶ $f|_{x_i'}$ - αρνητικός συν-παράγοντας (co-factor) της f ως προς το x_i ,
 - ▶ $f|_{x_i}$ - θετικός συν-παράγοντας (co-factor) της f ως προς το x_i

▶ 10

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Θεώρημα Boole/Shannon

► Θεώρημα Boole/Shannon

- Αν $f: B^n \rightarrow B$ είναι δυαδική συνάρτηση, τότε:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) =$$

$$x_i' \cdot f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) + x_i \cdot f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) =$$

$$x_i' \cdot f|_{x_i'} + x_i \cdot f|_{x_i} =$$

$$(x_i' + f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)) (x_i + f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)) =$$

$$(x_i' + f|_{x_i}) (x_i + f|_{x_i'})$$

- για κάθε (x_1, x_2, \dots, x_n) στο B

► 11

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Απόδειξη Θεωρήματος Boole/Shannon

► Απόδειξη – με επαγωγή

- Ισχύει για:

- Σταθερές συναρτήσεις
- Προβολές

- Επαγωγικό βήμα για g, h . Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για

- $(g + h)$
- $(g \cdot h)$
- g'

► 12

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ **Κανονικές Μορφές**
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 13

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Κανονικές Μορφές – Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι

- ▶ Με αναδρομική εφαρμογή του θεωρήματος Boole/Shannon προκύπτουν οι δυο κανονικές μορφές

Ανάπτυξη Boole/Shannon με .

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =$$

$$f(0, \dots, 0, 0) x_1' \dots x_{n-1}' x_n' +$$

$$f(0, \dots, 0, 1) x_1' \dots x_{n-1}' x_n +$$

$$\dots$$

$$f(1, \dots, 1, 1) x_1 \dots x_{n-1} x_n.$$

Ανάπτυξη Boole/Shannon με +

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =$$

$$[f(0, \dots, 0, 0) + x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n].$$

$$[f(0, \dots, 0, 1) + x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n'].$$

$$\dots$$

$$[f(1, \dots, 1, 1) + x_1' + \dots + x_{n-1}' + x_n'].$$

Ιδιότητες

- ▶ οι αξιολογήσεις της f ονομάζονται διακρίνουσες
- ▶ Τα θεμελιώδη γινόμενα ονομάζονται **ελαχιστόροι**
- ▶ Τα θεμελιώδη αθροίσματα ονομάζονται **μεγιστόροι**

▶ 14

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ **Ομοφωνία/Συνεπαγωγή**
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 15

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Ομοφωνία και Συνεπαγωγή

▶ Ομοφωνία

- ▶ Στο B ισχύει:
 - ▶ $xy + x'z + yz = xy + x'z$
 - ▶ $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$
- ▶ **Απόδειξη – Χρήση Έκφρασης Boole/Shannon**

▶ Συνεπαγωγή

- ▶ Στο B ισχύει:
 - ▶ Το $x \Rightarrow y$ είναι ίσο με $x' + y$
 - ▶ $x \Rightarrow y = x' + y$

▶ 16

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ **Πρόβλημα SAT**
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 17

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Το Πρόβλημα Ικανοποίησης Εξόδου (Satisfiability)

- ▶ Για μια έξοδο δυαδικής συνάρτησης, $B^v \rightarrow B$, το πρόβλημα ικανοποίησης εξόδου (SAT) είναι η εύρεση μιας, ή περισσότερων τιμών, των εισόδων έτσι ώστε η έξοδος να γίνει αληθής
- ▶ Το πρόβλημα SAT είναι εκθετικό (NP) μια και για να βρεθούν ο/οι συνδυασμοί απαιτείται η εξερεύνηση 2^v συνδυασμών
- ▶ Συνήθως το SAT εκφράζεται ως γινόμενο αθροισμάτων

▶ 18

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ **Αδιάφορες Τιμές**
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 19

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Αδιάφορες Τιμές

- ▶ **Satisfiability DCs (SDCs)** – Αδιάφορες τιμές Ικανοποίησης από τις εισόδους
 - ▶ Συνδυασμοί εισόδων που δεν μπορούν να συμβούν και εισόδων/εξόδου μιας πύλης



- ▶ **Observability DCs (ODCs)** – Αδιάφορες τιμές Παρατήρησης στις εξόδους
 - ▶ Συνδυασμοί που φιλτράρονται από τιμές ελέγχου



▶ 20

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 21

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Ταυτολογία

- ▶ Ορίζουμε:
 - ▶ Μια συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, για κάθε x_1, \dots, x_n ονομάζεται **ταυτολογία**
- ▶ Θεώρημα κάλυψης κύβου
 - ▶ Για συνάρτηση f και κύβο c , ισχύει:

$$c \leq f \Leftrightarrow f|c = 1$$
- ▶ Απόδειξη
 - ▶ $c \leq f \Leftrightarrow c|c \leq f|c \Leftrightarrow 1 \leq f|c \Leftrightarrow f|c = 1$
- ▶ Θεώρημα Ταυτολογίας
 - ▶ $f = 1 \Leftrightarrow f|x = f|x' = 1$
- ▶ Δηλαδή, μπορούμε αναδρομικά να διαιρέσουμε την f
 - ▶ Αν κάποιο από τα φύλλα δεν καταλήξει σε ταυτολογία τότε η f δεν είναι ταυτολογία

▶ 22

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ **Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος**
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 23

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Ελαχιστοποίηση Διεπίπεδου Κυκλώματος

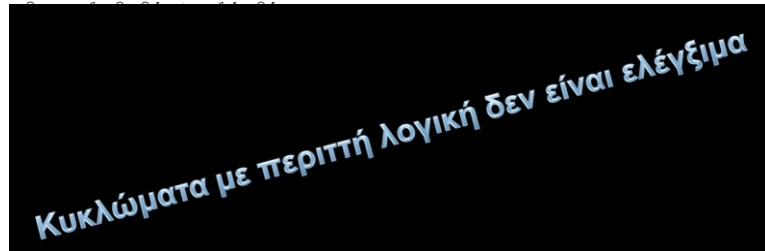
- ▶ Συναρτήσεις Κόστους
 - ▶ Αριθμός πυλών
 - ▶ Αριθμός εισόδων στις πύλες
 - ▶ Μέγιστη δυνατότητα δοκιμής
 - ▶ Έλεγχος ότι ο κάθε κόμβος μπορεί να τεθεί σε 0 ή 1
 - ▶ Δεν είναι δηλαδή κολλημένος στο 1 (s-a-1) ή κολλημένος στο 0 (s-a-0)
- ▶ **Αριθμός όρων**
- ▶ Παράδειγμα προς μελέτη
 - ▶ Έξοδοι y_1, y_2 και εσωτερικός κόμβος y_3
 - ▶ $y_1 = x_1' x_2' + y_3$
 - ▶ $y_2 = x_1 x_2' + x_1' x_2$
 - ▶ $y_3 = x_1 x_2 y_2' + x_1' x_2'$

▶ 24

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα

- ▶ $y_1 = x_1' x_2' + y_3$
- ▶ $y_2 = x_1 x_2' + x_1' x_2$
- ▶



x_2

- ▶ Πως κάνουμε έλεγχο για y_2 s-a-0, s-a-1;
 - ▶ Βρίσκουμε ένα διάνυσμα που κάνει το y_2 μηδέν (αντίστροφη τιμή)
 - ▶ Βρίσκουμε διανύσματα που προάγουν την τιμή του y_2 για παρατήρηση σε έξοδο

▶ 25

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ **Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι**
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 26

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Επάγοντες Όροι και Πρώτοι Επάγοντες

- ▶ **Επάγων Όρος (Implicant)**
 - ▶ Ένας κύβος που ανήκει στον σύνολο ON (ή DC) μιας συνάρτησης f ονομάζεται επάγοντας όρος (implicant)
- ▶ **Πρώτος Επάγων Όρος (Prime Implicant)**
 - ▶ Ένας επάγοντας όρος που δεν συμπεριλαμβάνεται σε κανέναν άλλο επάγοντα όρο ονομάζεται πρώτος (prime)
- ▶ **Παράδειγμα:**
 - ▶ $f = xy' + xyz$,
 - ▶ xy' και xyz είναι επάγοντες όροι
 - ο xyz δεν είναι πρώτος, μια και υπάρχει πρώτος που τον καλύπτει αφαιρώντας την διάσταση y
- ▶ **Αν ένας πρώτος όρος εμπεριέχει ελαχιστόρους που δεν εμπεριέχονται σε κανέναν άλλο πρώτο λέγεται ουσιώδης (essential)**

▶ 27

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ **Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine**
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 28

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Ουσιώδης Πρώτος (Essential Prime)- Θεώρημα Quine

- ▶ Ουσιώδης Πρώτος Επάγοντας (Essential Prime Implicant)
 - ▶ Πρώτος όρος που εμπεριέχει ελαχιστόρους που δεν εμπεριέχονται σε κανέναν άλλο πρώτο
- ▶ **Θεώρημα Quine**
 - ▶ Ένα ελάχιστο άθροισμα γινομένων (sor) πάντα αποτελείται από άθροισμα πρώτων επαγόντων όρων
 - ▶ αν ο ορισμός του κόστους συνεπάγεται ότι αύξηση των εμφανίσεων των μεταβλητών αυξάνει το κόστος
- ▶ Το παραπάνω θεώρημα είναι το θεμελιώδες θεώρημα της διεπίπεδης βελτιστοποίησης/απλοποίησης
 - ▶ Το κόστος του κάθε πρώτου είναι μια AND ή ο αριθμός των εμφανίσεων των μεταβλητών του

▶ 29

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 30

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Υπολογισμός Πρώτων Επαγόντων Όρων

▶ Ο υπολογισμός υπολογισμού των πρώτων βασίζεται στην δυαδική ιδιότητα: $Xy + Xy' = X$

▶ Αλγόριθμος/Μέθοδος Πίνακα

1. Ξεκινώντας από ελαχιστόρους μεγέθους n (με n όρους)
 - ▶ Τους διατάσσουμε με φθίνοντα αριθμό αρνήσεων
2. Συγχωνεύουμε ανά δύο τους ελαχιστόρους με διαφορά μιας άρνησης (απόσταση 1 στον κύβο) και παράγουμε τον νέο όρο με μια λιγότερη μεταβλητή ($n-1$)
3. Σημαδεύουμε τους ελαχιστόρους που καλύπτονται
4. Όταν τελειώσουν οι συνδυασμοί συνεχίζουμε στους ($n-1$) όρους από το βήμα 2, μέχρι να μην γίνονται άλλες συγχωνεύσεις
5. Οι πρώτοι είναι οι μη σημαδεμένοι, εναπομείναντες όροι.

▶ 31

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Εξαγωγής Πρώτων

▶ Δίνεται:

$$f = x'y' + wxy + x'yz' + wx'z$$

▶ Εκφράζουμε σε Ελαχιστόρους:

$$f = w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz' + wxyz' + wxyz$$

▶ Εκφράζουμε το αρχικό στάδιο του πίνακα:

Αριθμός Θετικών Όρων	Ελαχιστόροι
0	$w'x'y'z'$
1	$w'x'y'z, w'x'yz', wx'y'z'$
2	$wx'y'z, wx'yz'$
3	$wxyz', wx'y'z$
4	$wxyz$

▶ 32

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Εξαγωγής Πρώτων - Πίνακας

$w'x'y'z' \checkmark$	$w'x'y' \checkmark$ $w'x'z' \checkmark$ $x'y'z' \checkmark$	$x'y'$ $x'z'$	<p>► Πρώτοι:</p> <ul style="list-style-type: none"> ► $p1 = x'y'$ ► $p2 = x'z'$ ► $p3 = wy'z$ ► $p4 = wgz'$ ► $p5 = wxy$ ► $p6 = wxz$
$w'x'y'z \checkmark$ $w'x'y'z' \checkmark$ $wx'y'z' \checkmark$	$x'y'z \checkmark$ $x'y'z' \checkmark$ $wx'y' \checkmark$ $wx'z' \checkmark$		
$wx'y'z \checkmark$ $wx'y'z' \checkmark$	$wy'z$ wyz'		
$wxyz' \checkmark$ $wxy'z \checkmark$	wxy wxz		
$wxyz \checkmark$			

► 33

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- Δυαδικές Συναρτήσεις
- Θεώρημα Boole/Shannon
- Κανονικές Μορφές
 - Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- Πρόβλημα SAT
- Αδιάφορες Τιμές
 - SDC, ODC
- Ταυτολογία
- Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- **Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους**
- Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- Πίνακας Περιορισμών UCP
 - Τεχνικές απλοποίησης
- Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - Κύβοι με DCs
- MIS για Φραγή
- Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

► 34

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Αδιάφορες Τιμές στον Πίνακα Εξαγωγής

- ▶ Σε περίπτωση ελαχιστόρων που έχουν αδιάφορη τιμή (DC) - :
- ▶ Τους συγχωνεύουμε όπως τους υπόλοιπους για να δημιουργήσουμε μεγαλύτερους κύβους (πρώτους)
- ▶ Σημαδεύουμε και αφαιρούμε τους κύβους που αποτελούνται μόνο από DC
- ▶ Παράδειγμα: $f = yz' + xy'z$ (ON set), $d = x'z$ (DC set)

$x'y z' \checkmark$	(DC)	$x'y$
$x'y' z \checkmark$		yz'
$x'yz \checkmark$	(DC)	$x'z$ (DC)
$xyz' \checkmark$		$y'z$
$xy'z \checkmark$		Ο $x'z$ απαλείφεται μια και αποτελείται μόνο από DC

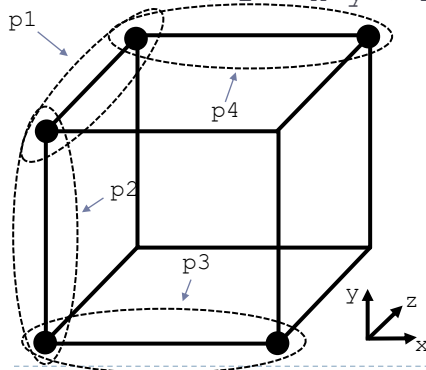
▶ 35

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- ▶ Έστω:
- ▶ $f = yz + x'y + y'z' + xyz + x'z'$
- ▶ Η f μπορεί να εκφραστεί από τους πρώτους της ως εξής:

$$f = x'y + x'z' + y'z' + yz$$



- ▶ $p1 = x'y$
- ▶ $p2 = x'z'$
- ▶ $p3 = y'z'$
- ▶ $p4 = yz$

▶ 36

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- ▶ Αν φτιάξουμε τον **πίνακα περιορισμών** που αντιστοιχεί τους ελαχιστόρους στους πρώτους:

	Ελαχιστόροι	p1	p2	p3	p4
▶ $p1 = x' y$	$x' y' z'$		1	1	
▶ $p2 = x' z'$	$x' yz'$	1	1		
▶ $p3 = y' z'$	$x' yz$	1			1
▶ $p4 = yz$	xyz				1
	$xy' z'$			1	

- ▶ Βλέπουμε ότι οι $p3, p4$ είναι υποχρεωτικά μέρος της λύσης, αφού μόνοο αυτοί καλύπτουν τους $xyz, xy' z'$
- ▶ Μετά απομένει επιλογή στους $p1, p2$

▶ 37

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Κάλυψης από Πρώτους

- ▶ Αν εκφράσουμε τον κάθε ελαχιστόρο της f ως προς τους πρώτους:

- ▶ Ο κάθε ελαχιστόρος παρουσιάζει επιλογή ως προς το από ποιους πρώτους θα καλυφθεί
 - ▶ Λ.χ. ο ελαχιστόρος $x' y' z'$ καλύπτεται από τους $p2, p3$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $x' y' z' = (p2 + p3)$ εκφράζοντας την επιλογή.

- ▶ Για να καλύψουμε όλη την f θέλουμε να καλύψουμε όλους τους ελαχιστόρους,

- ▶ Άρα το πρόβλημα επιλογής πρώτων εκφράζεται ως ένα γινόμενο αθροισμάτων, όπου οι (μόνο θετικές) μεταβλητές είναι οι πρώτοι => UCP

- ▶ Για το παράδειγμα: $(p2 + p3)p3(p1 + p2)(p1 + p4)p4 = 1$

▶ 38

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Διαδικός Χώρος
- ▶ Διαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ **Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)**
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 39

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης

- ▶ Έστω:
 - ▶ $J = \{1, \dots, n\}$, $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ σύνολο n δυαδικών μεταβλητών και
 - ▶ $\sigma_i = \sum_{j \in J_i} p_j$, $i = \{1, \dots, m\}$ όπου J_i είναι ένα άθροισμα θετικών όρων των μεταβλητών p_j .
- ▶ Το **Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης** (Unit Covering Problem – UCP) είναι το πρόβλημα εύρεσης συνόλου S ελαχίστου πλήθους, $S \subseteq J$, όπου θέτοντας $p_j = 1$, $\forall j \in S$, εγγυάται ότι:

$$\prod_i \sigma_i(p) = 1$$

- ▶ Το Κόστος του UCP είναι το πλήθος του S

▶ 40

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ **Πίνακας Περιορισμών UCP**
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

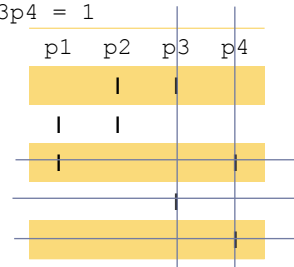
▶ 41

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

1. Απαραίτητες Στήλες

- ▶ Αν μια σειρά είναι μονή, δηλ. δεν καλύπτεται από άλλη στήλη, τότε η αντίστοιχη στήλη πρέπει να είναι στην λύση
- ▶ Οι αντίστοιχη, απαραίτητη στήλη και οι σχετικές σειρές αφαιρούνται από τον πίνακα
- ▶ Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα
 - ▶ $(p2 + p3) (p1 + p2) (p1 + p4) p3 p4 = 1$
 - ▶ $p3$ και $p4$ πρέπει να είναι 1 => απλοποιείται σε $(p1 + p2)$



▶ 42

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

2. Απαλοιφή Κατά Σειρά (ή Περιορισμό)

- ▶ Αν μια σειρά r_i περιέχει όλους τους άσσους μιας άλλης r_j τότε η r_i κυριαρχεί της r_j
- ▶ Η σειρά με τους περισσότερους άσσους, η r_i , απαλείφεται μια και καλύπτεται πάντα από τους πρώτους της r_j
- ▶ Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα

▶ Βασίζεται στην απορρόφηση:
 $x(x + y) = x$

- ▶ Στον πίνακα δεξιά, η 1^η, 4^η και 6^η σειρά κυριαρχούν την 2^η, 3^η και 5^η σειρά αντίστοιχα και έτσι απαλείφονται

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

▶ 43

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Τεχνικές Απλοποίησης Πίνακα UCP

3. Απαλοιφή Κατά Στήλη

- ▶ Αν μια στήλη r_i έχει όλους τους άσσους μιας άλλης r_j τότε η r_i κυριαρχεί της r_j
- ▶ Η στήλη με τους λιγότερους άσσους, η r_j , απαλείφεται μια και η r_i καλύπτει όλους τους ελαχιστόρους της r_j
- ▶ Αλγεβρική αντιστοιχία/παράδειγμα

▶ Βασίζεται στην εφαρμογή του αρνητικού συν-παράγοντα των κυριαρχημένων στηλών

$$(p1 + p2)(p2 + p3)(p4 + p5) = p2(p4 + p5)$$

	p1	p2	p3	p4	p5
1					
2					
3					
4					
5					

▶ 44

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Επίλυση του Πίνακα Περιορισμών του UCP

- ▶ Η επίλυση γίνεται με τον εξής Αλγόριθμο:
 1. Εφαρμόζουμε τις τεχνικές απλοποίησης με την σειρά προτεραιότητας τους, δηλ.:
 - a. Απαραίτητες Στήλες
 - b. Κάλυψη κατά Σειρά
 - c. Κάλυψη κατά Στήλη
 2. Στην περίπτωση που ο πίνακας δεν απλοποιείται περαιτέρω αλλά υπάρχει επιλογή στους πρώτους:
 - a. Επιλέγουμε τον πρώτο που φαίνεται να καλύπτει περισσότερους ελαχιστόρους ($p_x = 1$)
 - b. Συνεχίζουμε αναδρομικά στο 1^ο Βήμα μέχρι να βρεθεί λύση
 - c. Αναλύουμε την λύση χωρίς τον πρώτο που καλύψαμε ($p_x = 0$), και συγκρίνουμε ποια έχει καλύτερο κόστος

▶ 45

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 1

Ελαχιστόροι	p1	p2	p3	p4
$x' y' z'$		1	1	
$x' yz'$	1	1		
$x' yz$	1			1
xyz				1
$xy' z'$			1	

- ▶ $p3, p4 \Rightarrow$ απαραίτητες στήλες
 - ▶ άρα $p3, p4$ είναι μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

▶ 46

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 1

Ελαχιστόροι	p1	p2	p3	p4
x' y' z'		1	1	
x' yz'	1	1		
x' yz	1			1
xyz				1
xy' z'			1	

- ▶ p3, p4 => απαραίτητες στήλες
 - ▶ άρα p3, p4 είναι μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- ▶ Επιλογή στους p1, p2 (ίδιο κόστος)
- ▶ Λύσεις: {p1, p3, p4} (Κόστους 3), ή {p2, p3, p4} (Κόστους 3)

▶ 47

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- ▶ Καμία απλοποίηση
- ▶ Επιλέγουμε τον p1
 - ▶ έστω λοιπόν p1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

▶ 48

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- ▶ Καμία απλοποίηση
- ▶ Επιλέγουμε τον p1
 - ▶ έστω λοιπόν p1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- ▶ Κάλυψη κατά Στήλη
 - ▶ Ο p3 κυριαρχεί τον p2, ο p5 τον p6
 - ▶ p5, p6 δεν είναι μέρος της λύσης

▶ 49

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- ▶ ...
- ▶ Κάλυψη κατά Στήλη
 - ▶ Ο p3 κυριαρχεί τον p2, ο p5 τον p6
 - ▶ p2, p6 δεν είναι μέρος της λύσης
- ▶ Κάλυψη κατά Σειρά
 - ▶ Η 3 καλύπτει την 2, η 4 την 5
 - ▶ 3 και 5 απαλοψονται

▶ 50

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 2 – Κυκλικός Πυρήνας

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1	1				
2		1	1			
3			1	1		
4				1	1	
5					1	1
6	1					1

- ▶ ...
- ▶ Κάλυψη κατά Σειρά
 - ▶ Η 3 καλύπτει την 2, η 4 την 5
 - ▶ 3 και 5 απαλοίφονται
- ▶ Απαραίτητες στήλες p3, p5
- ▶ Λύση : {p1, p3, p5} (Κόστος 3)
- ▶ Οι υπόλοιπες λύσεις είναι ισοδύναμες...

▶ 51

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 3

	1	2	3	4	5	6
1	1		1		1	
2	1			1		1
3		1	1			1
4		1		1	1	

- ▶ Επιλέγουμε τον p1
 - ▶ έστω λοιπόν p1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε

▶ 52

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 3

	1	2	3	4	5	6
1	1		1		1	
2	1			1		1
3		1	1			1
4		1		1	1	

- ▶ Επιλέγουμε τον 1
 - ▶ έστω λοιπόν 1 μέρος της λύσης, αφαιρούμε τους ελαχιστόρους που καλύψαμε
- ▶ Κάλυψη κατά στήλη
 - ▶ Ο 2 κυριαρχεί των 3,4,5,6
- ▶ Λύση : {1, 2}

▶ 53

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

▶ 54

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

55 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

56 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

▶ 57

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

▶ 58

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

59 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

60 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

61 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4				1							
5					1	1					
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1			1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

62 ΗΥ437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Λύση: {1, 3, 5, 6, 7} (5)

Περιεχόμενα

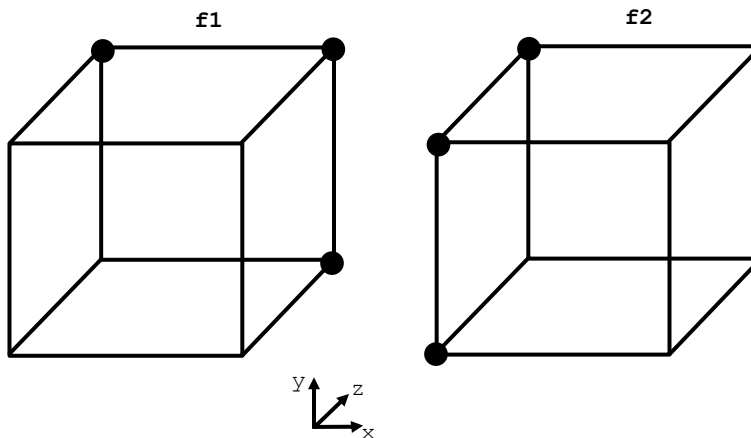
- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ **Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων**
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 63

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- ▶ Θεωρούμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

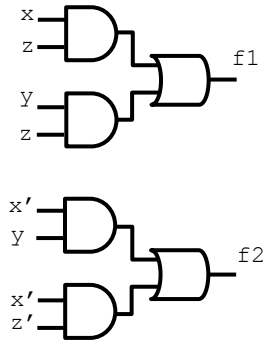


▶ 64

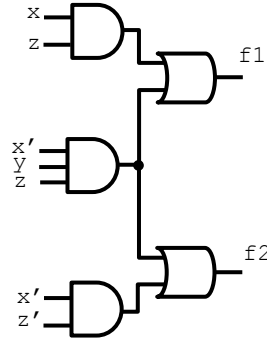
HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

▶ Χωρίς κοινούς όρους



▶ Με κοινό όρο



▶ 65

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ **Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης**
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 66

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης

- ▶ Για να δίνουμε έμφαση στις κοινές εξόδους μπορούμε να αναπαραστήσουμε συναρτήσεις πολλαπλών εξόδων με διάνυσματα

▶ Είσοδοι|Εξοδοι

- ▶ Παράδειγμα:

- ▶ Η προηγούμενη συνάρτηση πολλαπλών εξόδων $f_1 f_2$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

xyz	f₁f₂
1-1	10
011	11
0-0	01

▶ 67

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Υπολογισμός Πρώτων Επαγόντων Όρων

- ▶ **Αλγόριθμος/Μέθοδος Πίνακα Πολλαπλών Εξόδων**

1. Ξεκινώντας από ελαχιστόρους **πολλαπλών εξόδων**, μεγέθους n (με n όρους)
 - ▶ Τους διατάσσουμε με φθίνοντα αριθμό αρνήσεων
2. Συγχωνεύουμε ανά δύο τους ελαχιστόρους με διαφορά μιας άρνησης (απόσταση 1 στον κύβο) και παράγουμε τον νέο όρο με μια λιγότερη μεταβλητή ($n-1$)
 - ▶ **Τέμνουμε τους κύβους εξόδου**
3. Σημαδεύουμε τους ελαχιστόρους που καλύπτονται, **μόνο όταν οι έξοδοι, του πρώτου και του ελαχιστόρου, είναι ίσες**
4. Όταν τελειώσουν οι συνδυασμοί συνεχίζουμε στους $(n-1)$ όρους από το βήμα 2, μέχρι να μην γίνονται άλλες συγχωνεύσεις
5. Οι πρώτοι είναι οι μη σημαδεμένοι, εναπομείναντες όροι.

▶ 68

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Πίνακα Πρώτων με Πολλαπλές Εξόδους

000 01 ✓	0-0 01	▶ p1 = 011 11
010 01 ✓	01- 01	▶ p2 = 0-0 01
011 11	-11 10	▶ p3 = 01- 01
101 10 ✓	1-1 10	▶ p4 = -11 10
111 10 ✓		▶ p5 = 1-1 10

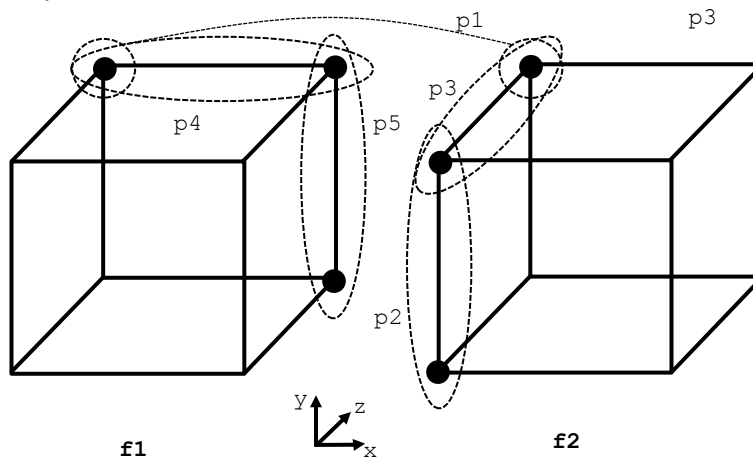
- ▶ Στον πίνακα περιορισμών του UCP οι ελαχιστόροι εκφράζονται ως ελαχιστόροι πολλαπλών εξόδων με μια-μία την κάθε έξοδο

▶ 69

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- ▶ Πρώτοι:



▶ 70

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Πίνακα Περιορισμών με Πολλαπλές Εξόδους

	p1	p2	p3	p4	p5
f1	000 01	1			
	010 01	1	1		
	011 01	1	1		
f2	011 10	1		1	
	101 10				1
	111 10			1	1

- ▶ Επιλύουμε τον πίνακα περιορισμών με τον ίδιο τρόπο...
 - ▶ Λύση: {p1, p2, p5}

▶ 71

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων

- ▶ Η μέθοδος μπορεί να προεκταθεί και για κύβους με DC στις εξόδους,

$$\text{▶ } 010|1-$$

- ▶ Στις συγχωνεύσεις:

$$\text{▶ } - \cdot 1 = 1$$

$$\text{▶ } - \cdot 0 = 0$$

▶ 72

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

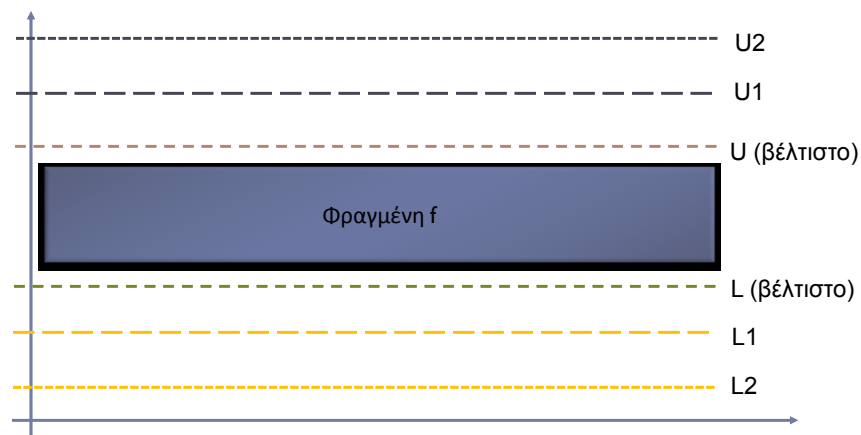
- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ **MIS για Φραγή**
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 73

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Πάνω και Κάτω Όρια - Συζήτηση

- ▶ Για μια φραγμένη συνάρτηση κόστους f :



▶ 74

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Υπολογισμός Κάτω Ορίου για την Κάλυψη

- ▶ Όταν/αν δυο σειρές, r_i, r_j :
 - ▶ έχουν κάπου μηδενικά, ενώ δεν έχουν κοινό 1 στις στήλες τους, τότε **είναι ανεξάρτητες** και απαιτούν 2 στήλες για να καλυφθούν, π.χ.
 - ▶ 1000 1010 1001
 - ▶ 0100 0101 0110
- ▶ Οι ανεξάρτητες σειρές έχουν αμοιβαίως διαφορετικούς άσσους στις στήλες
- ▶ Αν τώρα, ο πίνακας έχει **n ανεξάρτητα ζευγάρια** σειρών απαιτούνται **τουλάχιστον n** στήλες για την κάλυψη ($\# \geq n$)
- ▶ Για κυκλικό πίνακα, το καθολικό κάτω όριο είναι **2**, ακόμα και αν δεν υπάρχουν ανεξάρτητες σειρές:

- ▶ **$L = 2$**

1	0	1
---	---	---

1	1	0
---	---	---

0	1	1
---	---	---

▶ 75

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Αλγόριθμος MIS_QUICK

Αλγόριθμος MIS

```
MIS_QUICK(M) {
    MIS = empty set
    do {
        i = CHOOSE_SHORTEST_ROW(M) [row with least
"weight"]
        MIS = MIS U {i}
        M = DELETE_INTERSECTING_ROWS(M, i)
    } while (|| M || > 0) continue
    return MIS
}
```

- ▶ όπου $||M||$ αριθμός των σειρών που έχουν μείνει
- ▶ Ευριστικό Κόστος στην CHOOSE_SHORTEST_ROW:
 - ▶ (i) αριθμός των άσων (l) στην σειρά
 - ▶ (ii) συνολικός αριθμός των άσων οριζόντια στην σειρά και αυτών που τέμνονται κάθετα στα σημεία των άσων (l)

▶ 76

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα MIS με τα δυο Ευριστικά

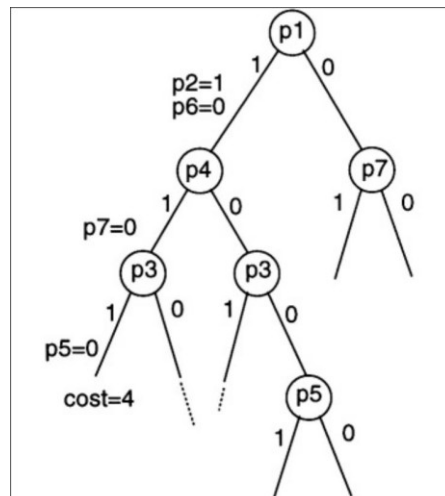
	1	2	3	4	5	6		
1	1	0	0	0	1	0	$w(1,1) = 2$	$w(2,1) = 5$
2	1	1	0	1	0	0	$w(1,2) = 3$	$w(2,2) = 9$
3	0	1	1	0	0	0	$w(1,3) = 2$	$w(2,3) = 6$
4	0	0	0	1	1	1	$w(1,4) = 3$	$w(2,4) = 7$
5	0	0	1	1	0	0	$w(1,5) = 2$	$w(2,5) = 6$
6	0	1	0	0	0	1	$w(1,6) = 2$	$w(2,6) = 5$
7	1	0	1	0	0	0	$w(1,7) = 2$	$w(2,7) = 6$

- ▶ Διαφορετικά ευριστικά = διαφορετικά βάρη
- ▶ Τα διαφορετικά βάρη επηρεάζουν μόνο τον χρόνο εκτέλεσης, όχι την ποιότητα της λύσης!

▶ 77

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

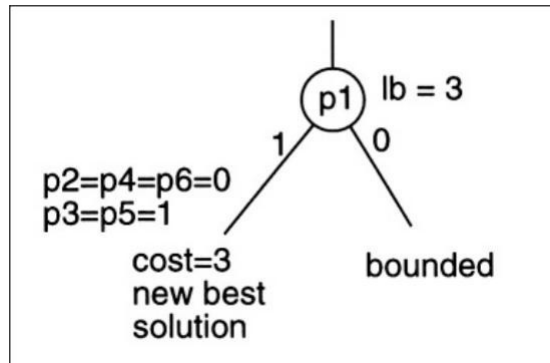
Παράδειγμα Δέντρου Επιλογών



▶ 78

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα Bounding από το MIS



- ▶ Στον κόμβο $p1$ το κάτω όριο δεξιά είναι 3
 - ▶ Το κόστος από αριστερά είναι 3
 - ▶ Άρα δεν εξερευνούμε τον δεξί κόμβο του δέντρου – τον φράζουμε

▶ 79

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Περιεχόμενα

- ▶ Πολυδιάστατος Δυαδικός Χώρος
- ▶ Δυαδικές Συναρτήσεις
- ▶ Θεώρημα Boole/Shannon
- ▶ Κανονικές Μορφές
 - ▶ Ελαχιστόροι/Μεγιστόροι
- ▶ Ομοφωνία/Συνεπαγωγή
- ▶ Πρόβλημα SAT
- ▶ Αδιάφορες Τιμές
 - ▶ SDC, ODC
- ▶ Ταυτολογία
- ▶ Ελαχιστοποίηση Δι-επίπεδου Κυκλώματος
- ▶ Επάγοντες όροι και Πρώτοι Επάγοντες Όροι
- ▶ Ουσιώδης Επάγοντες – Θεώρημα Quine
- ▶ Υπολογισμός Πρώτων με Μέθοδο Πίνακα
- ▶ Αδιάφορες τιμές στους Ελαχιστόρους
- ▶ Το Μονόσημο Πρόβλημα Κάλυψης (UCP)
- ▶ Πίνακας Περιορισμών UCP
 - ▶ Τεχνικές απλοποίησης
- ▶ Συναρτήσεις Πολλαπλών Εξόδων
- ▶ Κυβική Αναπαράσταση Συνάρτησης
 - ▶ Κύβοι με DCs
- ▶ MIS για Φραγή
- ▶ Αλγόριθμος Branch and Bound για Λύση του UCP

▶ 80

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Αλγόριθμος Branch and Bound UCP

Αλγόριθμος UCP Branch and Bound

```
BCP(F, U, currentSol) {
  (F, currentSol) = REDUCE(F, currentSol); // simplify //
  if (terminalCase(F)) {
    if (COST(currentSol) < U) {
      U = COST(currentSol);
      return (currentSol); // terminal case //
    }
    else return ("no solution");
  }
  L = LOWER_BOUND(F, currentSol); // compute lower bound //
  if (L >= U) return ("no solution")
  xi = CHOOSE_VAR(F);
  S1 = BCP(Fxi, U, currentSol U {xi});
  if (COST(S1) = L) return (S1);
  S0 = BCP(Fxi, U, currentSol);
  return BEST_SOLUTION(S1, S0);
}
```

- ▶ F = πίνακας, U = πάνω όριο = # μεταβλητών + 1 αρχικά
- ▶ F_{xi} = απλοποιημένος πίνακας με στήλη xi στην λύση
- ▶ F_{xi}' = πίνακας χωρίς την στήλη xi

▶ 81

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1									
2		1	1								
3			1	1							
4	1			1							
5					1	1				1	
6						1	1		1		
7							1	1			
8						1		1		1	1
9					1				1	1	1
10					1			1	1		
11					1		1				1
12	1										1
13					1	1		1			

▶ 82

HY437 - Διεπίπεδη Βελτιστοποίηση - QM - BB 2/19/2014

Παράδειγμα 4 – Δέντρο Επιλογών

