Σύνθετα Δίκτυα

com+plex: with+ -fold (having parts)

Διδάσκων –
Δημήτριος Κατσαρός

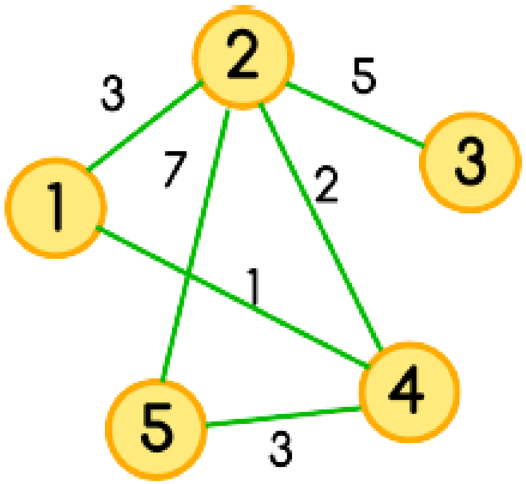
Διάλεξη 17η

Σύνθετα, δυναμικά δίκτυα

Complex, dynamic networks

Στατικά σύνθετα δίκτυα

1st Unit	2nd Unit	(Weight)
1	2	3
1	4	1
2	3	5
2	4	2
2	5	7
4	5	3



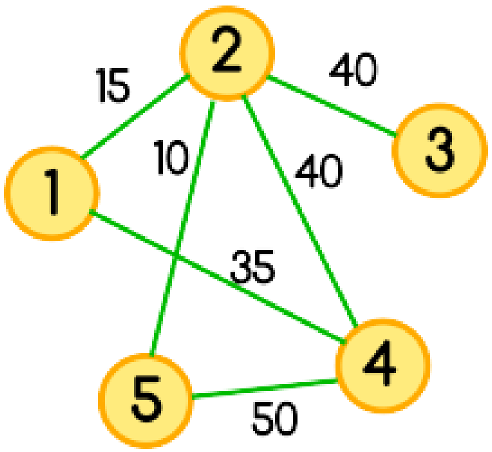
Μερικές μετρικές στα σύνθετα δίκτυα

- Συνδεσιμότητα & συνιστώσες
- Απόσταση, μέση μήκος μονοπατιού, ομαδοποίηση, αποτελεσματικότητα
- Κεντρικότητες κόμβων
- Ύπαρξη κοινοτήτων

=> Διαδικασίες σε δίκτυα (percolation, communication, spreading, opinions, κ.τ.λ.)

Χρονικά μεταβαλλόμενα δίκτυα: Συσσώρευση

1st Unit	2nd Unit	Start	Length
2	4	0	40
2	5	50	10
2	3	70	20
4	5	60	50
1	2	130	15
1	4	140	35
2	3	220	20



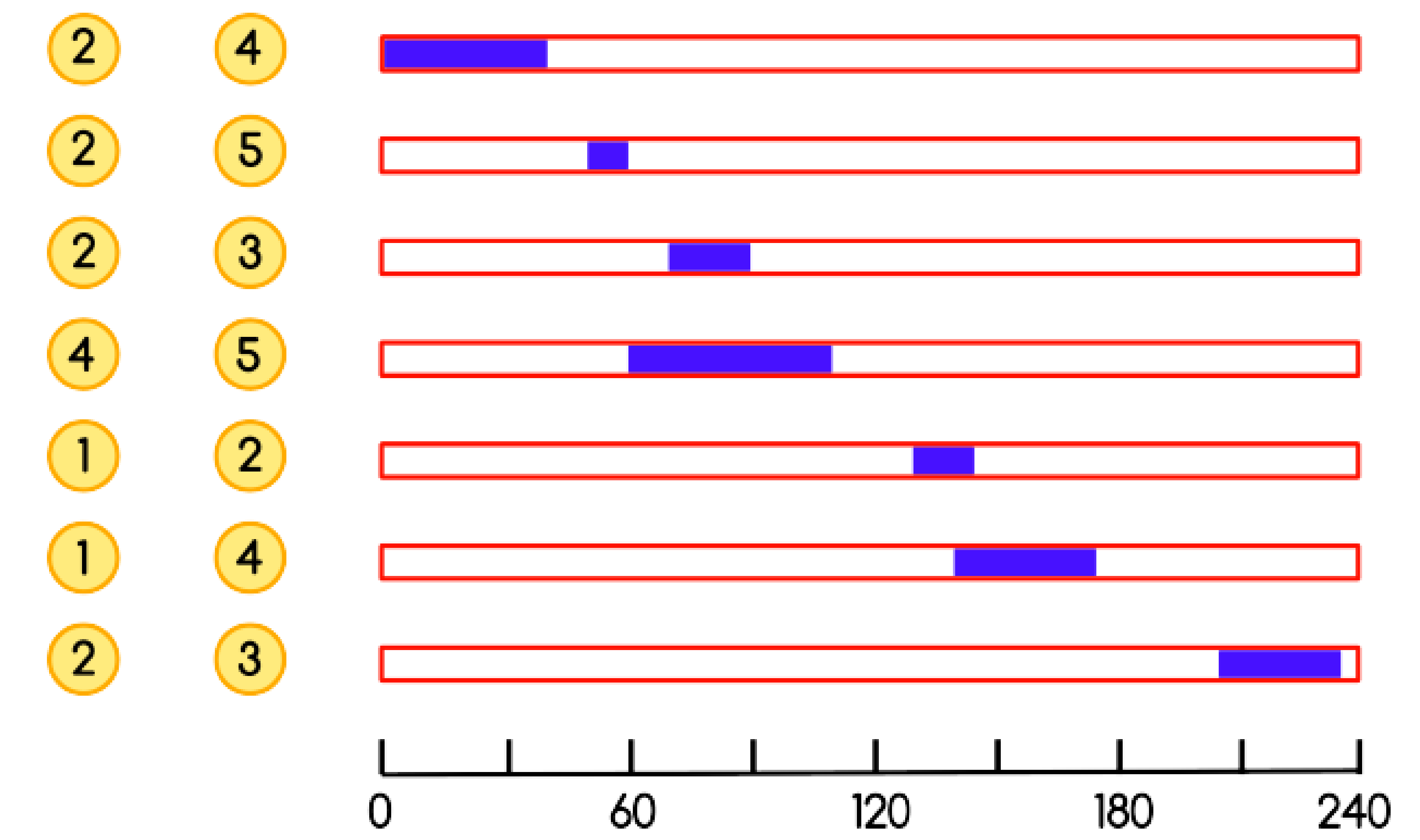
Μειονεκτήματα της συσσώρευσης

- Απώλεια των συσχετίσεων και εξαρτήσεων στο χρόνο (temporal correlations και time-dependence)
- Υπερ-εκτίμηση του αριθμού των διαδρομών και μονοπατιών (walks και paths)

Γειτνίαση: Πώς αλλάζει;

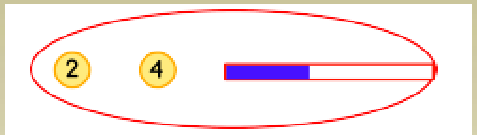
1st Unit	2nd Unit	Start	Length
2	4	0	40
2	5	50	10
2	3	70	20
4	5	60	50
1	2	130	15
1	4	140	35
2	3	220	20

Γειτνίαση: Πώς αλλάζει;

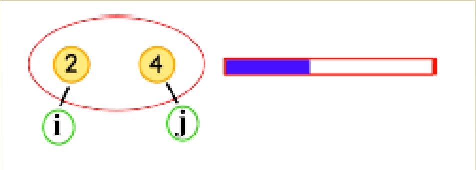


Επαφές

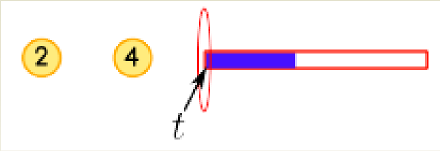
- c = (i ; j ; t; δt) είναι μια contact



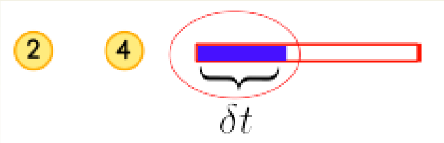
- i και j είναι δυο κόμβοι



- t είναι ο start time



- δt είναι η contact duration



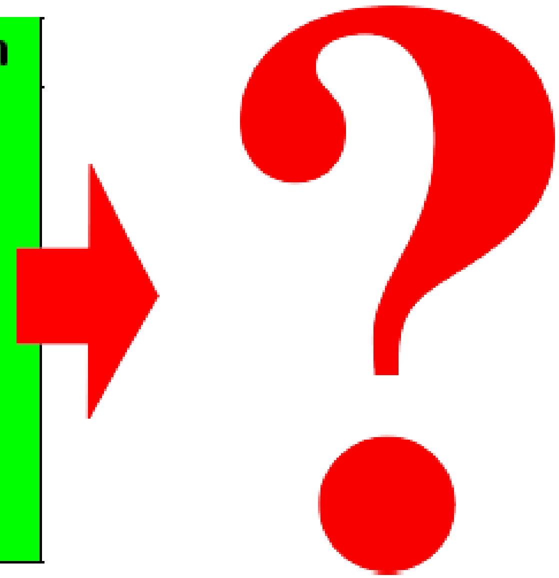
Πίνακας γειτνίασης

1^{st} Unit	2^{nd} Unit	(Weight)
1	2	**3**
1	4	**1**
2	3	**5**
2	4	**2**
2	5	**7**
4	5	**3**

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας γειτνίασης σε δυναμικά δίκτυα;

1st Unit	2nd Unit	Start	Length
2	4	0	40
2	5	50	10
2	3	70	20
4	5	60	50
1	2	130	15
1	4	140	35
2	3	220	20



TVG: Χρονικά Μεταβαλλόμενα Γραφήματα

- Choose a time-window of size Δt
- $[t, t+\Delta t] \Longrightarrow G_t$ contains all the contacts $(\cdot, \cdot, \tau_i, \delta\tau_i)$ overlapping with $[t, t+\Delta t]$, i.e. such that:

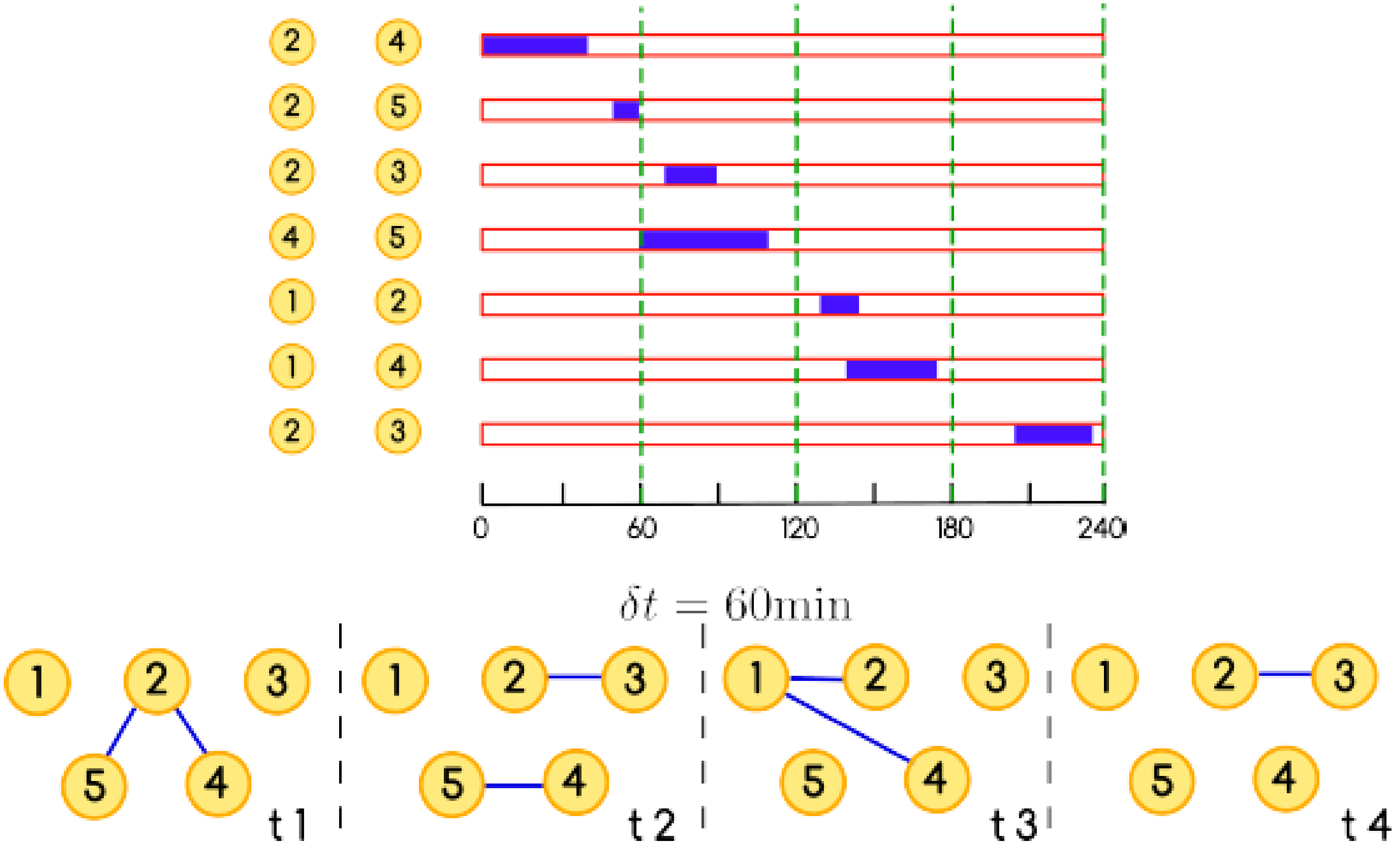
$$t \le \tau_i < t + \Delta t \quad \text{or} \tag{1}$$

$$t \le \tau_i + \delta\tau_i < t + \Delta t \quad \text{or} \tag{2}$$

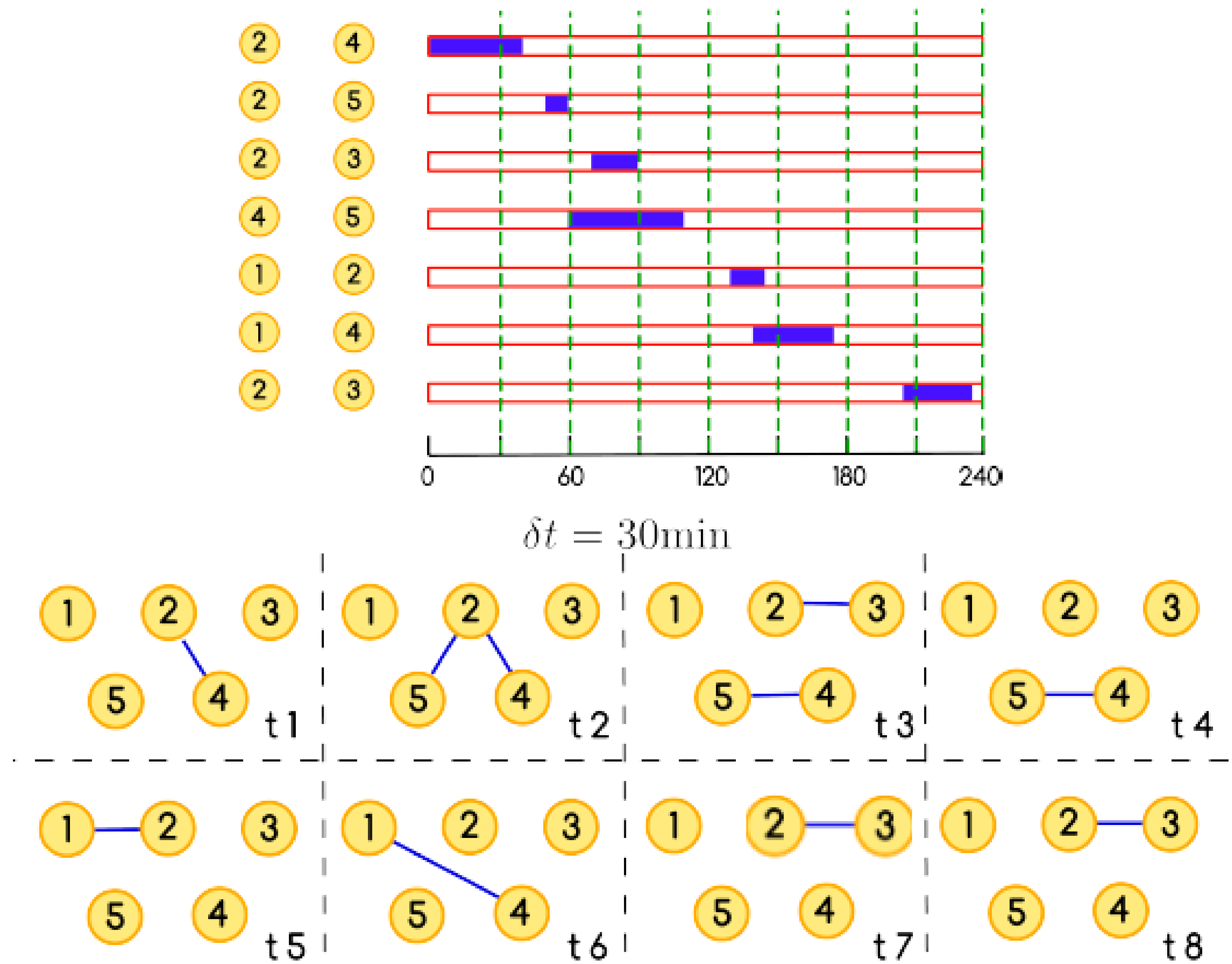
$$\tau_i < t \quad \wedge \quad \tau_i + \delta\tau_i > t + \Delta t \tag{3}$$

- G_t is a snapshot of the system in $[t, t+\Delta t]$.
- The sequence $\mathcal{G}_{0,T} = \{G_0, G_{\Delta t}, \ldots G_T\}$ of M snapshots over N nodes is a time-varying graph.

Time-scales (1)

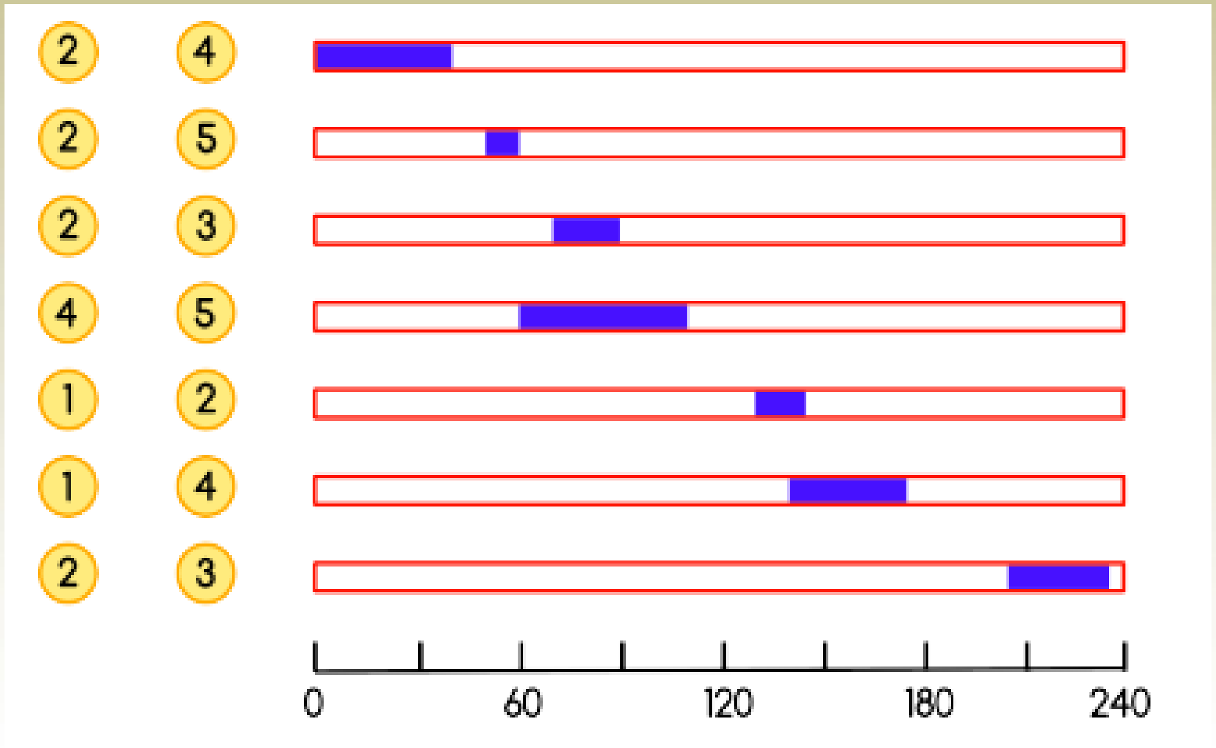


Time-scales (2)



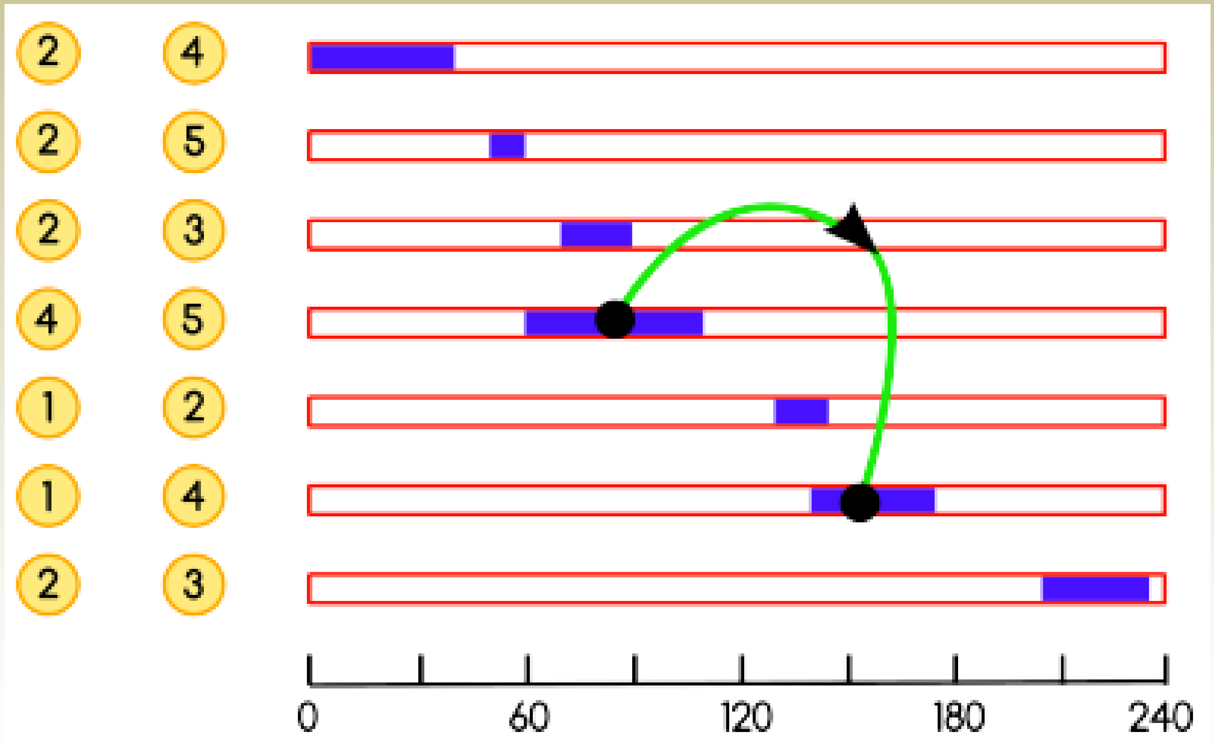
Προσβασιμότητα

- Από τον κόμβο 5 στον κόμβο 1



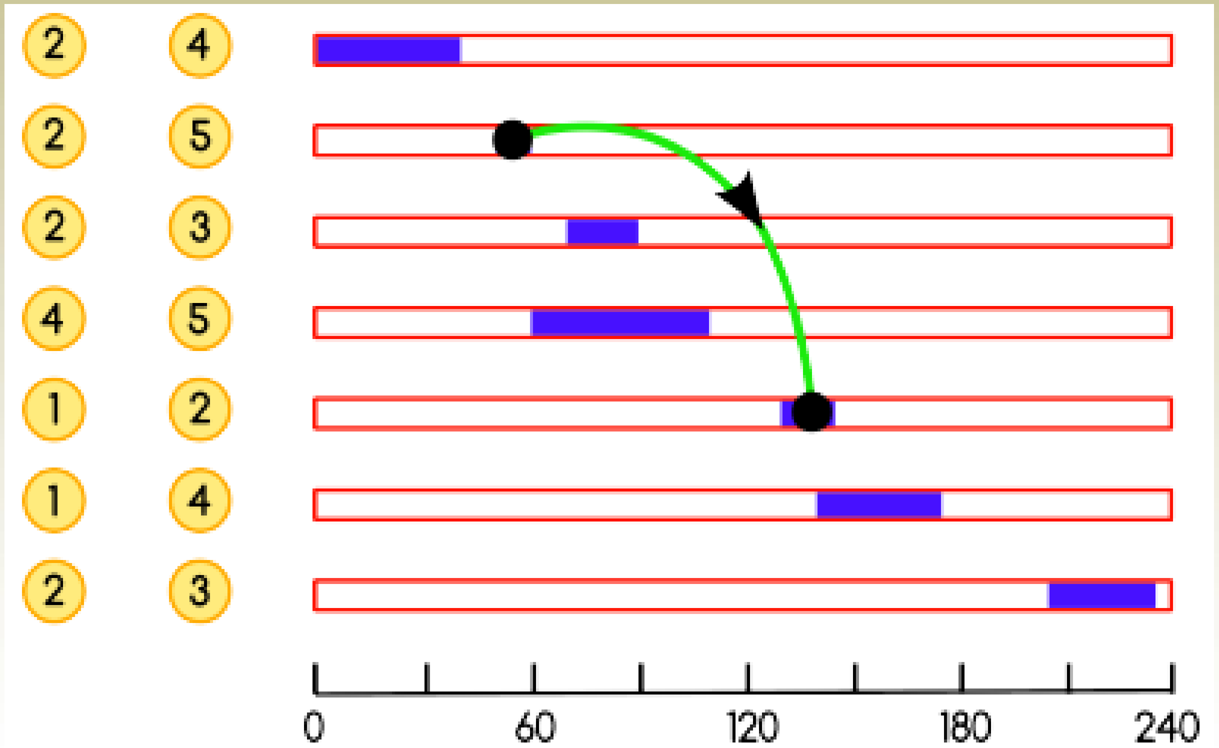
Προσβασιμότητα

- Από τον κόμβο 5 στον κόμβο 1



Προσβασιμότητα

- Από τον κόμβο 5 στον κόμβο 1



Προσβασιμότητα σε TVG

- Ένα temporal walk από τον i στον j είναι μια temporally ordered sequence από L ακμές που οδηγούν από το i στο j
- Ένα temporal path είναι ένας temporal walk για τον οποίο κάθε κόμβο διασχίζεται μόνο μια φορά
- Ο κόμβος i είναι temporally connected στον j εάν υπάρχει ένα temporal path που οδηγεί από τον i στον j
- Στην περίπτωση αυτή, θα λέμε ότι ο j είναι temporally reachable από τον i
- Η temporal connectedness ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΥΤΕ συμμετρική ΟΥΤΕ μεταβατική

Node components

Δεδομένου ενός κόμβου i, ορίζουμε:

- Τον temporal OUT-component του i (κόμβοι j για τους οποίους υπάρχει ένας TW από τον i στον j)
- Τον temporal IN-component του i (κόμβοι j για τους οποίους υπάρχει ένας TW από τον j στον i)
- Την temporal strongly connected component του I, δηλ., κόμβοι j οι οποίοι είναι και στον IN(i) και στο OUT(i)
- Οι i και j είναι strongly connected εάν το i $\in$ IN(j) και i $\in$ OUT(j)

Graph components

- strongly connected component: ένα μη κενό σύνολο S από κόμβους τέτοιο ώστε $\forall i,j \in S$ τα i και j είναι strongly connected
- Affine graph: ένα στατικό γράφημα GG που έχει τους ίδιους κόμβους με το G και τέτοιο ώστε η (i ; j) είναι μια ακμή του GG εάν οι i και j είναι strongly connected στο G
- Οι strongly connected components του G είναι οι maximal-cliques του GG
- Η εύρεση της largest strongly connected component ενός TVG απαιτεί exponential time ως προς τον αριθμό των ακμών του affine γραφήματος!

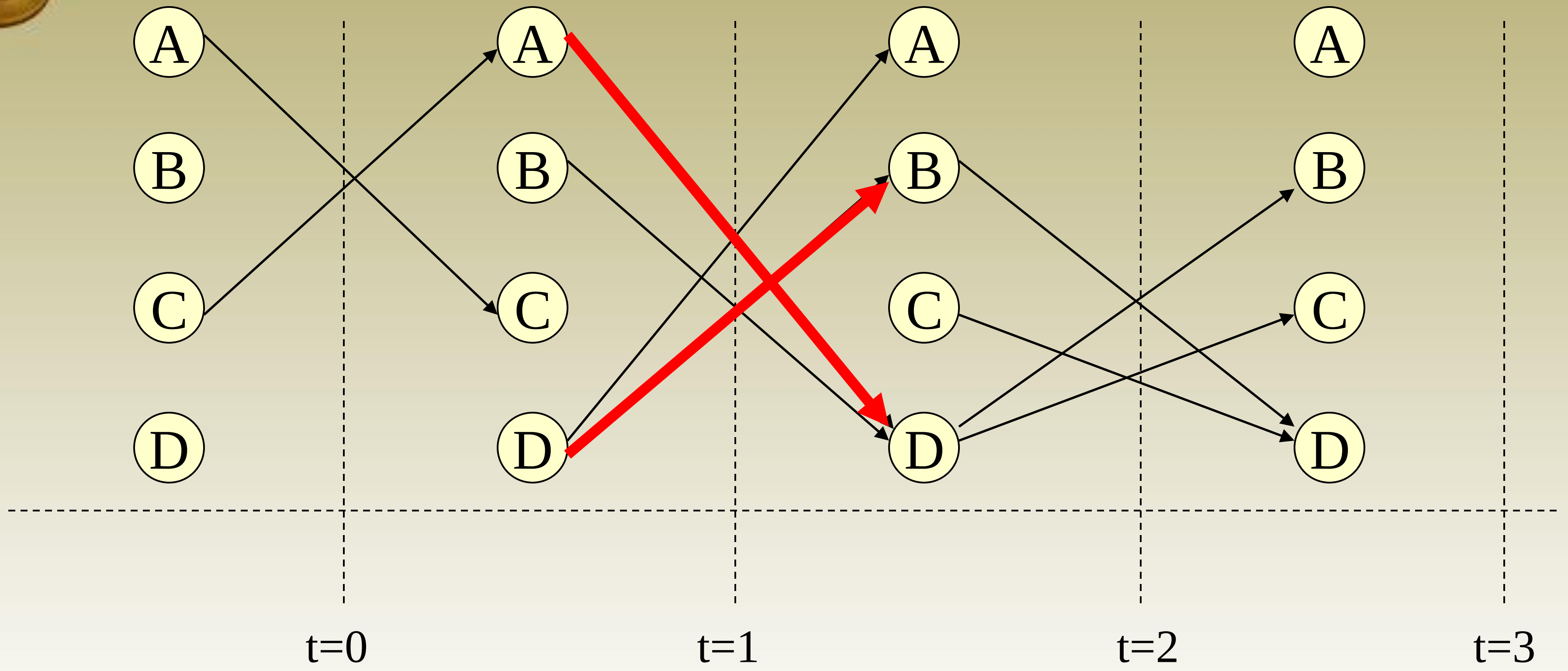
Μετρικές κεντρικότητας για χρονικά μεταβαλλόμενα σύνθετα δίκτυα

Centrality measures for temporal, complex networks

Ορισμός temporal shortest path

- Ένα temporal shortest path από τον κόμβο u στον v για το διάστημα [i,j] όπου $0 \leq i < j \leq n$ ορίζεται ως εκείνο το μονοπάτι $p=\langle u_i,\ldots,v_k\rangle$ όπου $i < k \leq j$ με το μήκος του μονοπατιού $|p|=\min_{i<l \leq j} \delta(u_i, v_l)$ όπου δ(u, v) είναι η shortest path distance από τον κόμβο u στον v σε ένα στατικό γράφημα

Temporal shortest paths (in a directed network)

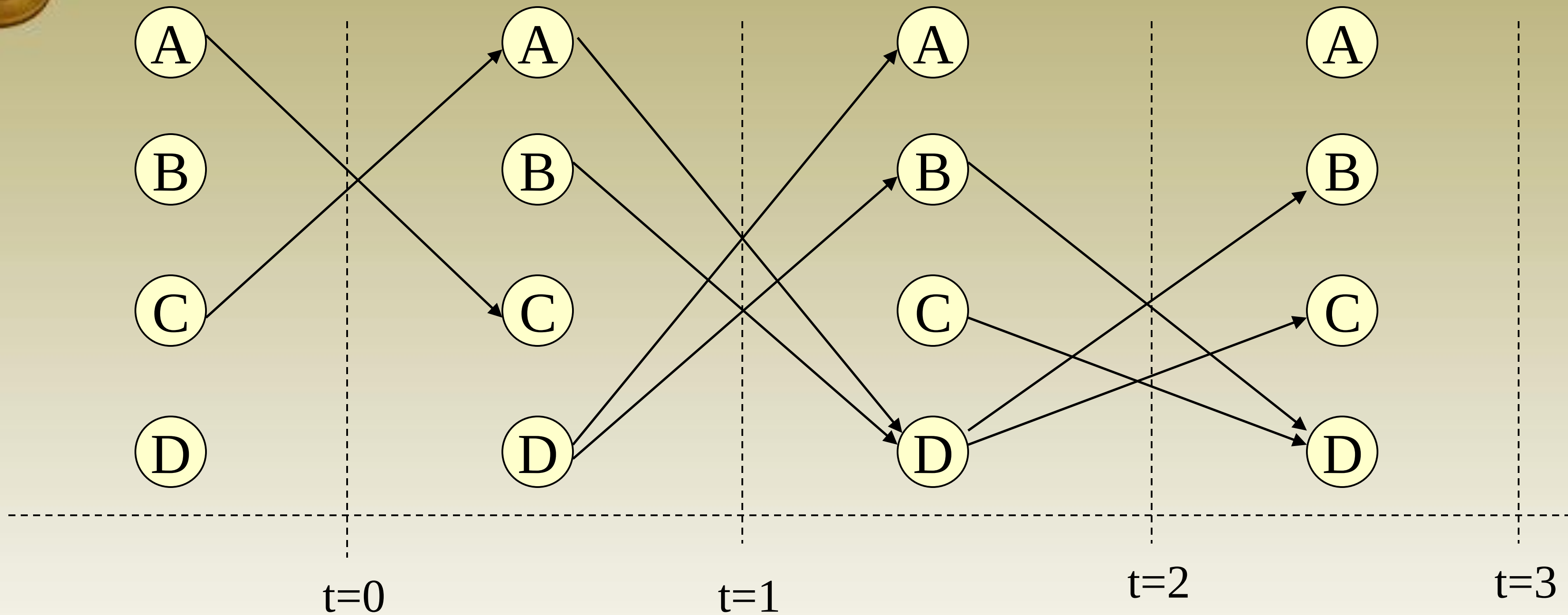


- To temporal shortest path από A→B στο διάστημα [0,3]

Temporal degree centrality

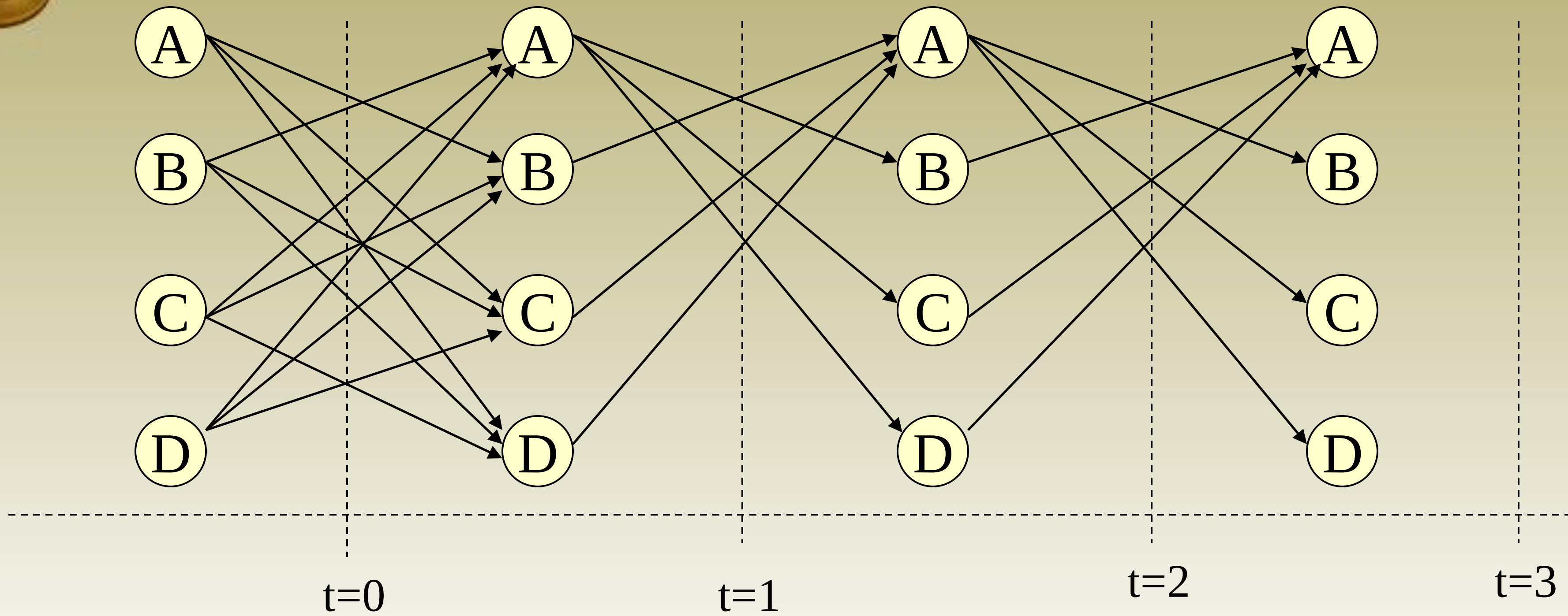
- Ορίζουμε τον temporal degree $D_{i,j}(v)$ για κάποιον κόμβο v σε ένα διάστημα [i,j] όπου $0 \le i < j \le n$ ως τον κανονικοποιημένο συνολικό αριθμό incoming edges και outgoing edges του v στο διάστημα [i,j]
- Εάν το δίκτυο είναι στην πραγματικότητα στατικό, τότε το παραπάνω άθροισμα ισούται με $\Sigma_{t=i}^{j} D_t(v)$, όπου $D_t(v)$ είναι ο βαθμός του v στο γράφημα G_t
- Για να κάνουμε την κανονικοποίηση, διαιρούμε με $2(|V|-1)m$ όπου $m=j-i$
- Ο κανονικοποιημένος temporal degree είναι η μέση τιμή του βαθμού ενός κόμβου στην χρονοσειρά των εξελισσόμενων γραφημάτων

Temporal degree centrality



- Ο temporal degree του κόμβου C στο διάστημα [0,3] είναι:
  - Incoming edges: A→C στο [0,1] και D→C στο [2,3], άρα 2
  - Outgoing edges: C→A στο [0,1] και C → D στο [2,3], άρα 2
  - Συνεπώς, (in+out)/{2(|V|-1)m} = (2+2)/{2(4-1)3} = 4/18= 0.22

Temporal closeness centrality



Εάν λάβουμε υπόψη μόνο το διάστημα [i,j] (εδώ το [0,3]), οι τιμές των temporal closeness όλων των κόμβων είναι ίδιες, αφού όλα τα temporal shortest paths προσδιορίζονται κατά το διάστημα [0,1] όταν το γράφημα είναι πλήρως συνδεδεμένο. Οι επόμενες αλληλεπιδράσεις των κόμβων θα αγνοηθούν στον υπολογισμό

Temporal closeness centrality

- Η temporal closeness $C_{i,j}(v)$ ενός κόμβου v για το [i,j] όπου $0 \leq i < j \leq n$ είναι το άθροισμα των αντιστρόφων temporal shortest path distances προς όλους τους άλλους κόμβους του $V \setminus v$ για κάθε χρονικό διάστημα $\{[t,j] : i \leq t < j\}$
- Ορίζουμε την temporal closeness θεωρώντας m χρονικά διαστήματα $\{[t,j] : i \leq t < j\}$ όπου $m = j-i$ μεταβάλλοντας τον αρχικό χρόνο t κάθε χρονικού διαστήματος από i μέχρι $j-1$ αντί για ένα μόνο διάστημα [i,j] με αρχικό χρόνο i
- Να σημειώσουμε ότι το διάστημα [i,j] συνεισφέρει τα temporal shortest paths μόνο όταν ο αρχικός χρόνος είναι i. Τα temporal shortest paths από τον u στον v σημαίνει τα μονοπάτια από τον u_i στον v_k, ο οποίος είναι ο πρώτος κόμβος που συναντάται κατά μήκος ενός μονοπατιού από τον u_i σε έναν κόμβο του $\{v_{i+1}, . . . ,v_j\}$

Temporal closeness centrality

- Όμως, τα temporal shortest paths από τον κόμβο u στον v θα αλλάζουν, καθώς ο χρόνος εξελίσσεται
- Επομένως, επιπρόσθετα στην περίπτωση που ο αρχικός χρόνος είναι ο i, πρέπει να θεωρήσουμε και τα temporal shortest paths από τον κόμβο u στον v για τα επιπλέον $m-1$ χρονικά διαστήματα $\{[t,j] : i < t < j\}$ μεταβάλλοντας το t από $i+1$ μέχρι $j-1$ για να αναλύσουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά των temporal shortest paths μεταξύ u και v με πιο λογικό τρόπο

Temporal closeness centrality

- Μαθηματικά, ορίζουμε την temporal closeness centrality για κάποιον κόμβο v ως εξής:

$$\mathcal{C}_{i,j}(v) = \sum_{i \leqslant t < j} \sum_{u \in V \setminus v} \frac{1}{\Delta_{t,j}(v,u)}$$

- Όπου $\Delta_{t,j}(v,u)$ είναι η temporal shortest path distance από τον v στον u για το διάστημα [t,j].
- Εάν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι από τον v στον u για το διάστημα [t,j], τότε η $\Delta_{t,j}(v,u)$ ορίζεται ως ίση με το ∞
- Προφανώς, θεωρούμε ότι 1/∞ =0
- Η temporal closeness κανονικοποιείται διαιρώντας κάθε τιμή closeness value με (|V| − 1)m όπου m=j−i

Πολυπλοκότητα υπολογισμού της temporal closeness centrality

- Δεδομένου ενός μεταβαλλόμενου στο χρόνο γραφήματος G που παράγεται από το $GD_{i,j}=(V,E_{i,j})$, οι all-pair temporal shortest path distances μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $O(m|V|^2)$ με δυναμικό προγραμματισμό με βάση την αναδρομική σχέση $\Delta_{t,j}(v,u)=\Delta_{t+1,j}(k,u)+1$, εάν $(v,k)\in E$, αλλιώς $\Delta_{t,j}(v,u)=0$
- Έχοντας υπολογίσει τις temporal shortest path distances, οι τιμές των temporal closeness $C_{i,j}(v)$ ενός κόμβου v του V μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(m|V|)$, και άρα ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για τον υπολογισμό των temporal closeness όλων των κόμβων του V είναι $O(m|V|^2)$

Temporal betweenness centrality

- Διαισθητικά, η temporal betweenness $B_{i,j}(v)$ ενός κόμβου $v \in V$ σε ένα διάστημα $[i,j]$, $0 \leq i < j \leq n$, θα πρέπει να είναι το άθροισμα του ποσοστού όλων των temporal shortest paths διαμέσου του κόμβου v προς το σύνολο των temporal shortest paths μεταξύ όλων των ζευγών κόμβων για κάθε διάστημα $\{[t,j]: i \leq t < j\}$
- Με το ίδιο σκεπτικό όπως και εκείνο για τον ορισμό της temporal closeness, λαμβάνουμε υπόψη m χρονικά διαστήματα $\{[t,j] : i \leq t < j\}$ όπου $m = j - i$ αντί για ένα μόνο διάστημα $[i,j]$

Temporal betweenness centrality

- Έστω ότι με $S_{x,y}(u,v)$ συμβολίζεται το σύνολο των temporal shortest paths από την πηγή s στον προορισμό d για το διάστημα [x,y] και $S_{x,y}(s,d,v)$ είναι το υποσύνολο των $S_{x,y}(s,d)$ που αποτελείται από εκείνα τα μονοπάτια που περιλαμβάνουν τον κόμβο v.
- Τότε, η temporal betweenness centrality για τον κόμβο v ορίζεται ως:

$$\mathcal{B}_{i,j}(v) = \sum_{i \leqslant t < j} \sum_{\substack{s \neq v \neq d \in V \\ \sigma_{t,j}(s,d) > 0}} \frac{\sigma_{t,j}(s,d,v)}{\sigma_{t,j}(s,d)}$$

όπου $\sigma_{t,j}(s,d) \equiv |S_{t,j}(s,d)|$ και $\sigma_{t,j}(s,d,v) \equiv |S_{t,j}(s,d,v)|$

Temporal betweenness centrality

- Η temporal betweenness κανονικοποιείται διαιρώντας κάθε τιμή betweenness με (V^v_s V^v_d m) όπου $m = j - i$ και V^v_s, $V^v_d \in V \backslash v$, τέτοια ώστε $\sigma_{t,j}(s,d) > 0$ για κάθε $s \in V^v_s$, για κάθε $d \in V^v_d$, και για $i \le t < j$

Ασκήσεις

- **Άσκηση 1.**

  Να βρεθούν οι τιμές της temporal closeness centralities όλων των κόμβων για το διάστημα [0,3] για το παρακάτω εξελισσόμενο χρονικά δίκτυο.