

# Σύνθετα Δίκτυα

com+plex: with+ -fold (having parts)

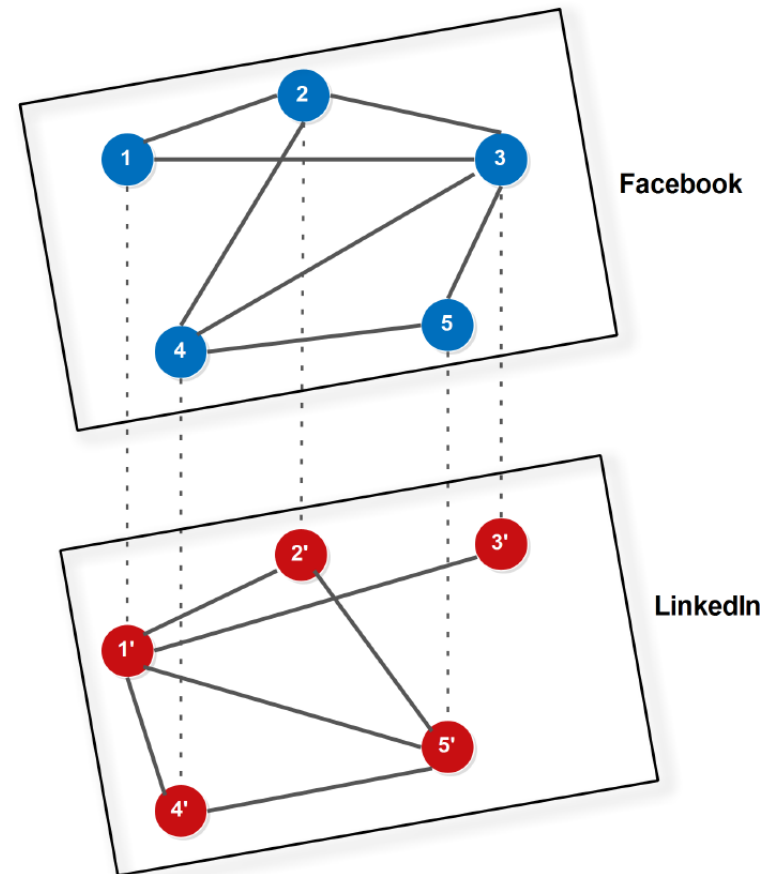
Διδάσκων –  
Δημήτριος Κατσαρός

# Πολυεπίπεδα/Διασυνδεδεμένα Δίκτυα

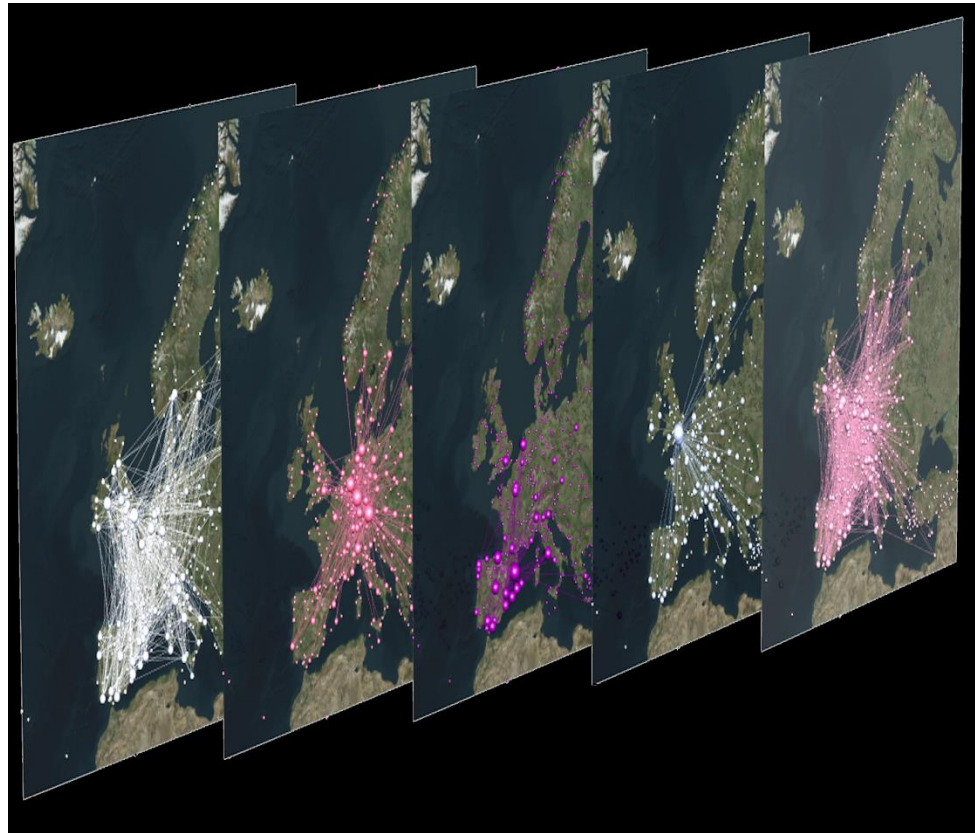


# Κοινωνικά δίκτυα (multiplex network)

- Έχετε λογαριασμό στο Facebook?
- Έχετε λογαριασμό στο LinkedIn?
- Έχετε λογαριασμό στο Twitter?

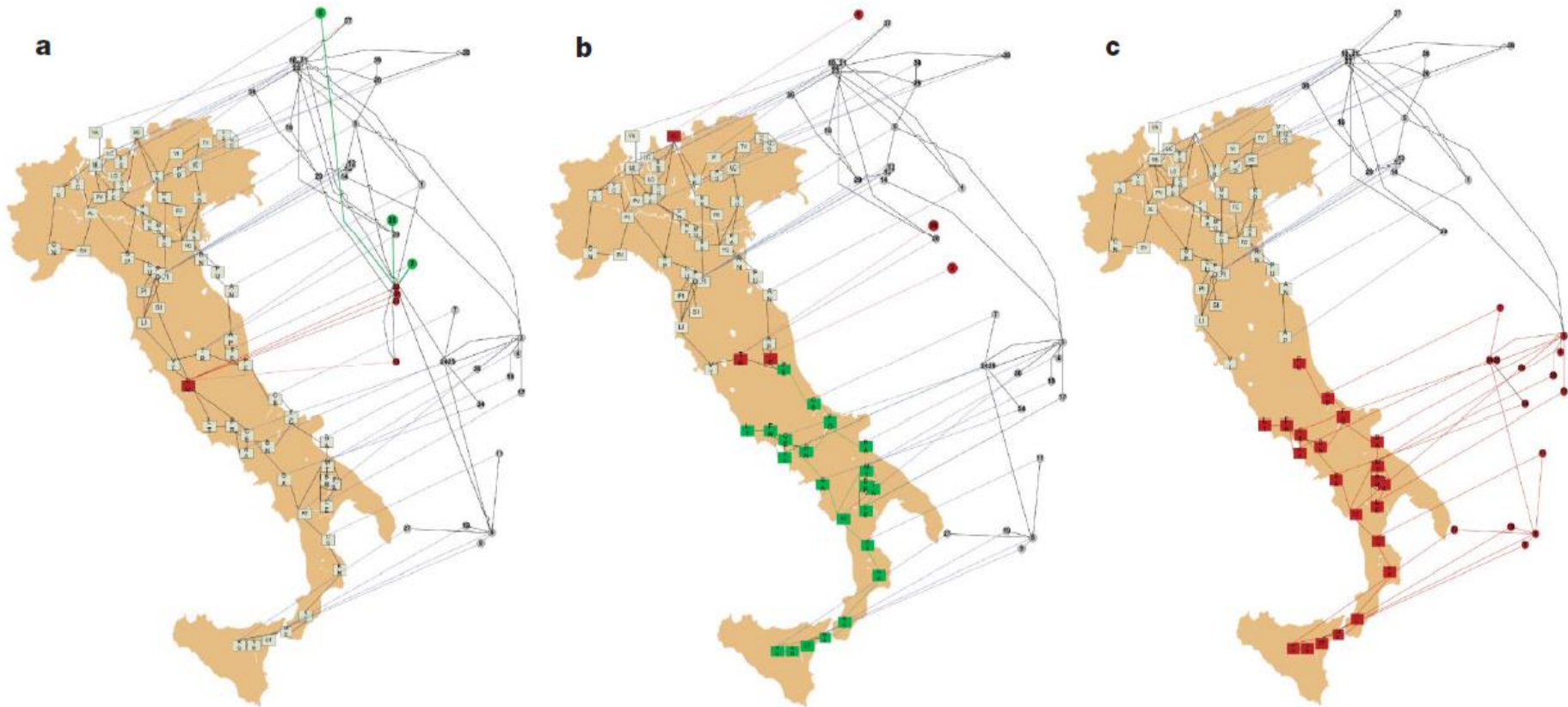


# Αεροπορικές γραμμές της Ευρώπης(multiplex network)



- Οι Πόλεις τις Ευρώπης είναι οι κόμβοι
- Οι ακμές είναι τα αεροπορικά δρομολόγια απο μια πόλη σε άλλη
- Τα layers είναι οι διάφορες αεροπορικές εταιρείες, **36 layers**

# Blackout στην Ιταλία 2003 (multilayer dependent)



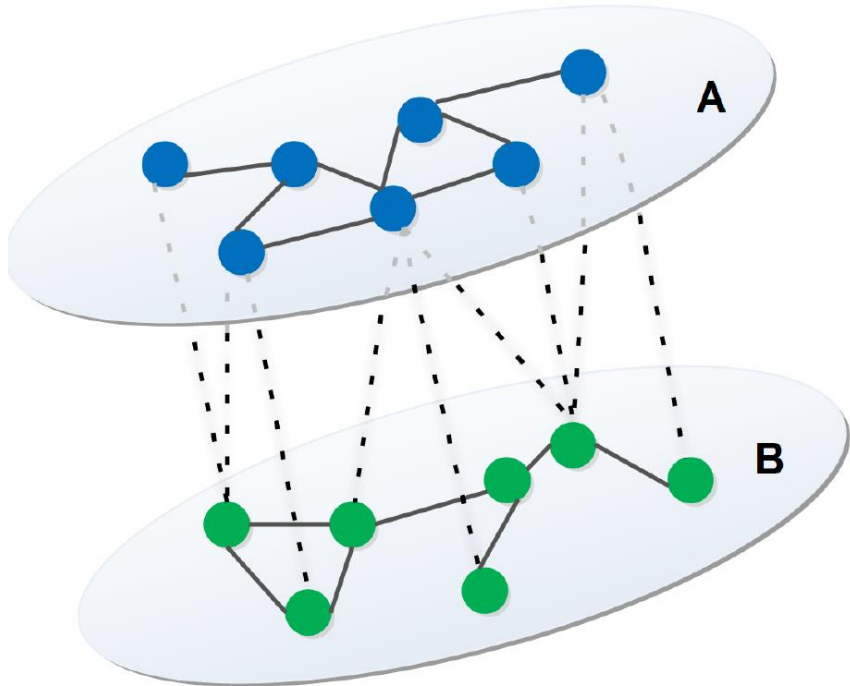
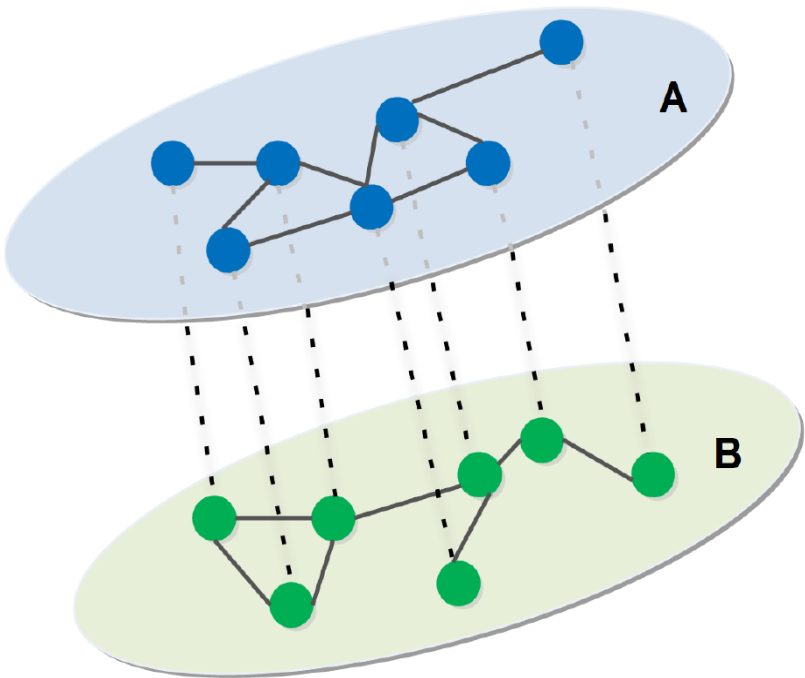
# Πολυεπίπεδα/διασυνδεδεμένα δίκτυα

- Πολυεπίπεδα (Multiplex) δίκτυα
  - Οι ίδιοι κόμβοι ανήκουν σε περισσότερα απο ένα δίκτυα (layers)
- Διασυνδεδεμένα εξαρτημένα δίκτυα
  - Η ορθή λειτουργία των κόμβων ενός δικτύου εξαρτάται απο την ορθή λειτουργία των διασυνδεδεμένων κόμβων σε άλλα δίκτυα
- Διασυνδεδεμένα ανεξάρτητα δίκτυα
  - Η ορθή λειτουργία των κόμβων σε ένα δίκτυο δεν εξαρτάται από άλλο δίκτυο

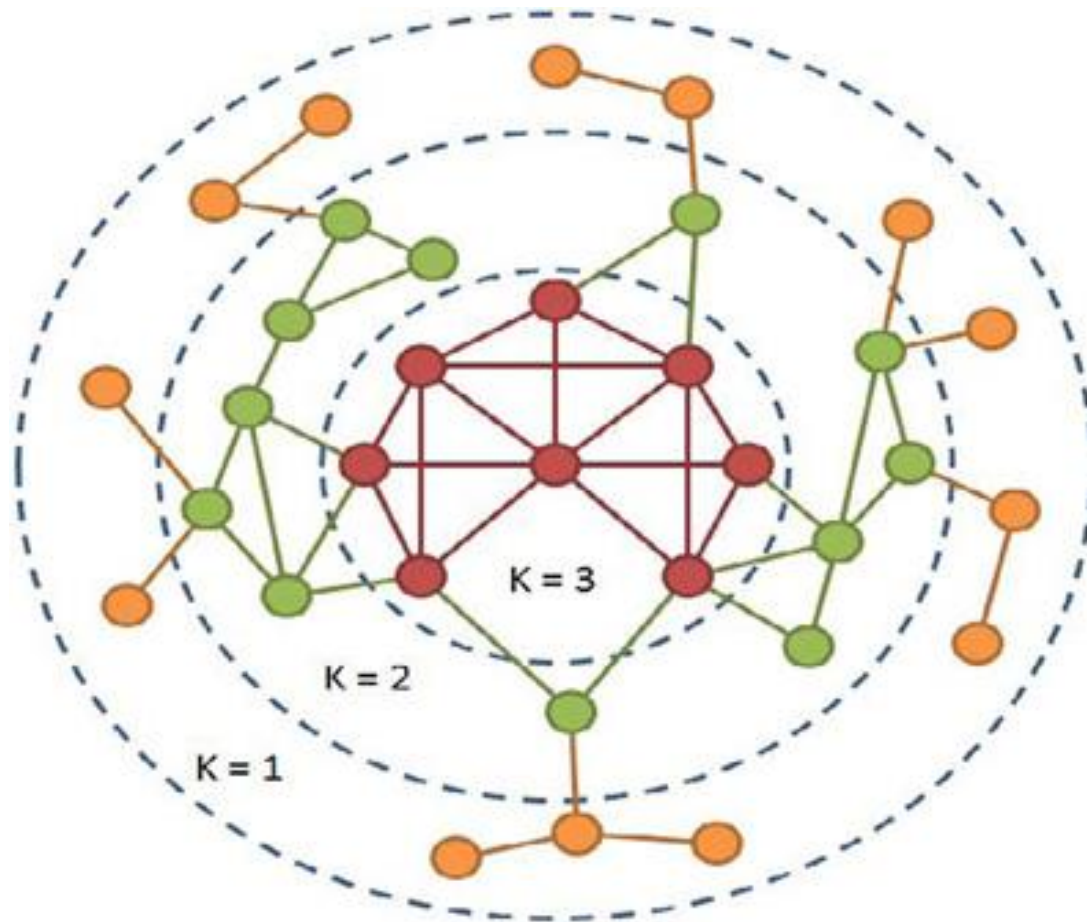
# Overview

Multiplex Network

Multilayer Network



# k-core decomposition

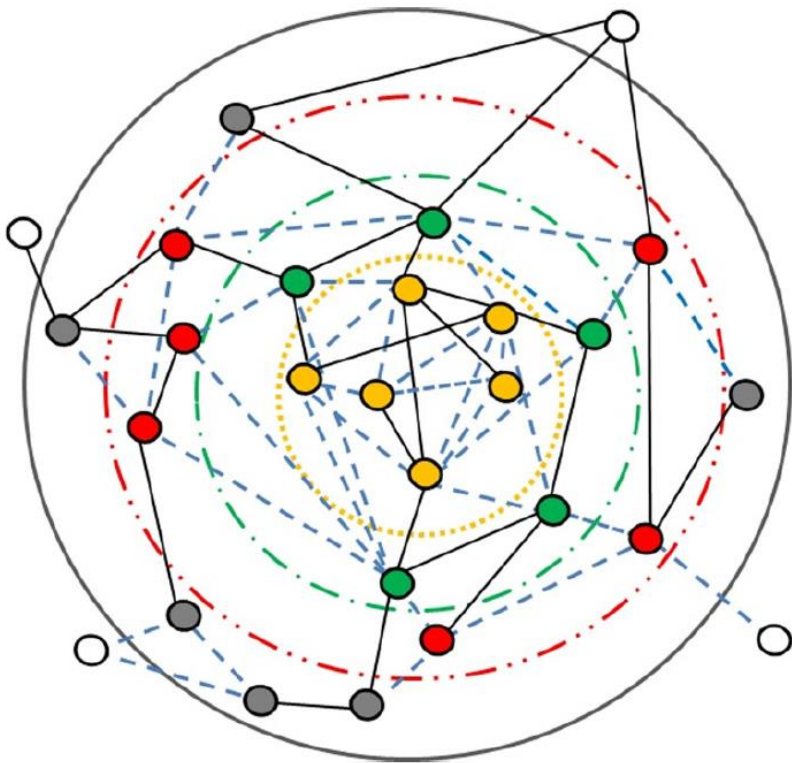




# Multiplex k-core Decomposition

- Ως k-core ενός multiplex δικτύου χαρακτηρίζεται το μεγαλύτερο υπογράφημα όπου κάθε κόμβος έχει το λιγότερο k ακμές σε κάθε layer
- Κλάδεμα? Παρόμοιο με τον ορισμό του k-core στα single δικτυα:
  - Σε κάθε βήμα αφαιρούμε έναν κόμβο, εάν για οποιοδήποτε layer ισχύει  $q_i \leq k_i$  όπου  $q_i$  ο αριθμός των ακμών του στο  $i$  layer
- **Όμως** το k-core ενός κόμβου στα multiplex δίκτυα θα καθορίζεται από το layer με τις λιγότερες συνδέσεις

# $(k_1, k_2)$ -core, ανα layer



- Οι πυρήνες από το εξωτερικό προς το εσωτερικό του δικτύου είναι  $(1,1)$ -core,  $(1,2)$ -core,  $(2,2)$ -core,  $(1,3)$ -core.
- Οι άσπροι κόμβοι έχουν συνδέσεις προς ένα μόνο layer!

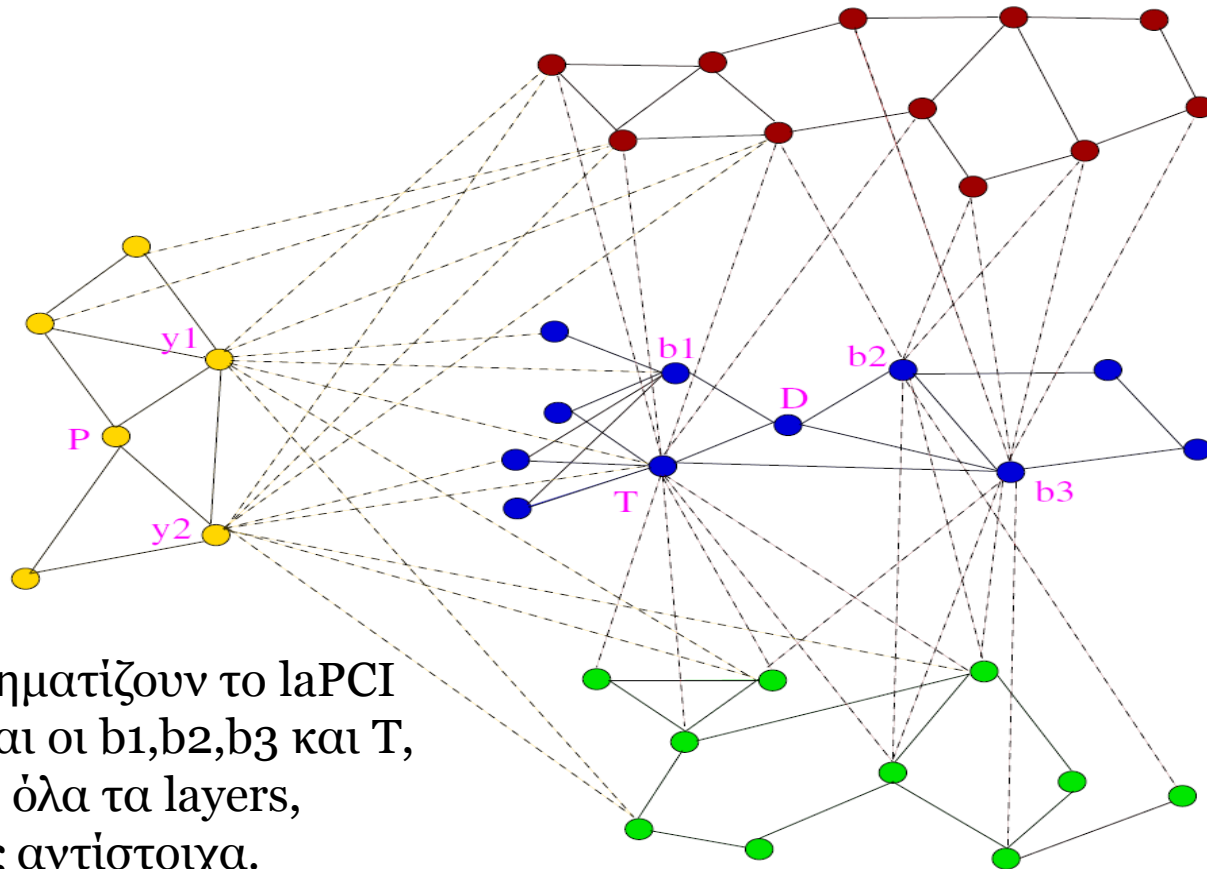
# Θυμηθείτε το 1-Power Community Index (PCI)

- Όταν ένας κόμβος  $u$  έχει  $1\text{-PCI}(u) = k$  αυτό σημαίνει ότι έχει  $k$  γείτονες στην 1-hop γειτονιά του, που ο καθένας τους έχει  $\text{degree} \geq k$ , ενώ οι υπόλοιποι γείτονές του  $u$  έχουν  $\text{degree} \leq k$

# Layer-agnostic PCI (laPCI)

- Ένας κόμβος  $u$  έχει  $\text{laPCI}(u)=k$  εάν έχει  $k$  γείτονες στην 1-hop γειτονιά του, όπου ο καθένας από αυτούς έχει τουλάχιστον  $k$  1-hop γείτονες προς οποιοδήποτε  $\text{layer}(s)$ , ενώ οι υπόλοιποι 1-hop γείτονες του  $u$  έχουν το πολύ  $k$  γείτονες προς οποιοδήποτε  $\text{layer}(s)$

# Παράδειγμα laPCI



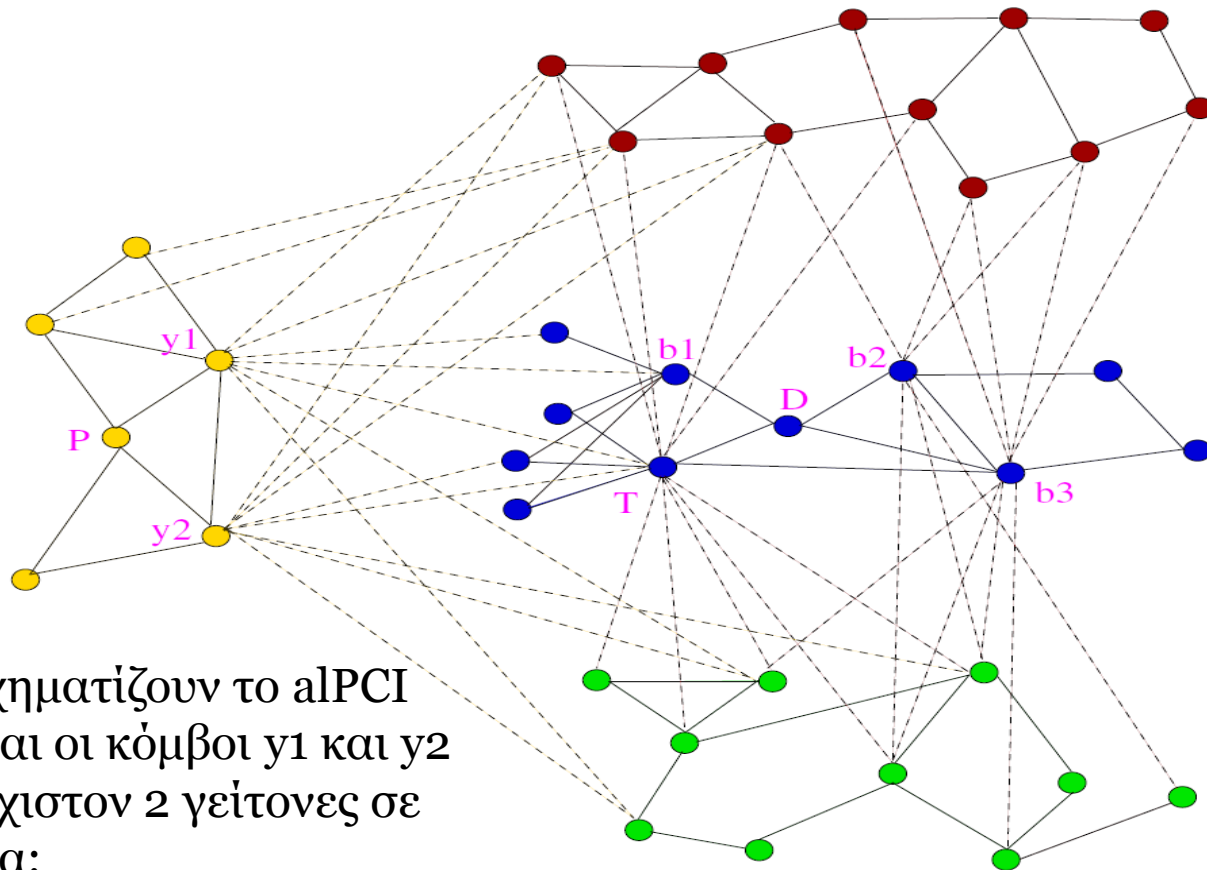
Οι κόμβοι που σχηματίζουν το laPCI του κόμβου D είναι οι b1,b2,b3 και T, με συνολικά προς όλα τα layers, 6,9,12,16 γείτονες αντίστοιχα.

$$\text{laPCI}(D) = 4$$

## All-layers PCI (alPCI)

- Ένας κόμβος  $u$  έχει  $\text{alPCI}(u)=k$  εάν έχει  $k$  γείτονες στην 1-hop γειτονιά του, όπου καθένας από αυτούς έχει τουλάχιστον  $k$  1-hop γείτονες προς όλα τα layers, ενώ οι υπόλοιποι 1-hop γείτονες του  $u$  έχουν το πολύ  $k$  γείτονες προς όλα τα layers
- **Όμως** τι συμβαίνει αν ο  $u$  δεν έχει γείτονες σε κάποιο(α) layer του διασυνδεδεμένου δικτύου?

# Παράδειγμα alPCI



Οι κόμβοι που σχηματίζουν το  $alPCI$  του κόμβου  $P$  είναι οι κόμβοι  $y1$  και  $y2$  που έχουν τουλάχιστον 2 γείτονες σε **όλα** τα layers άρα:

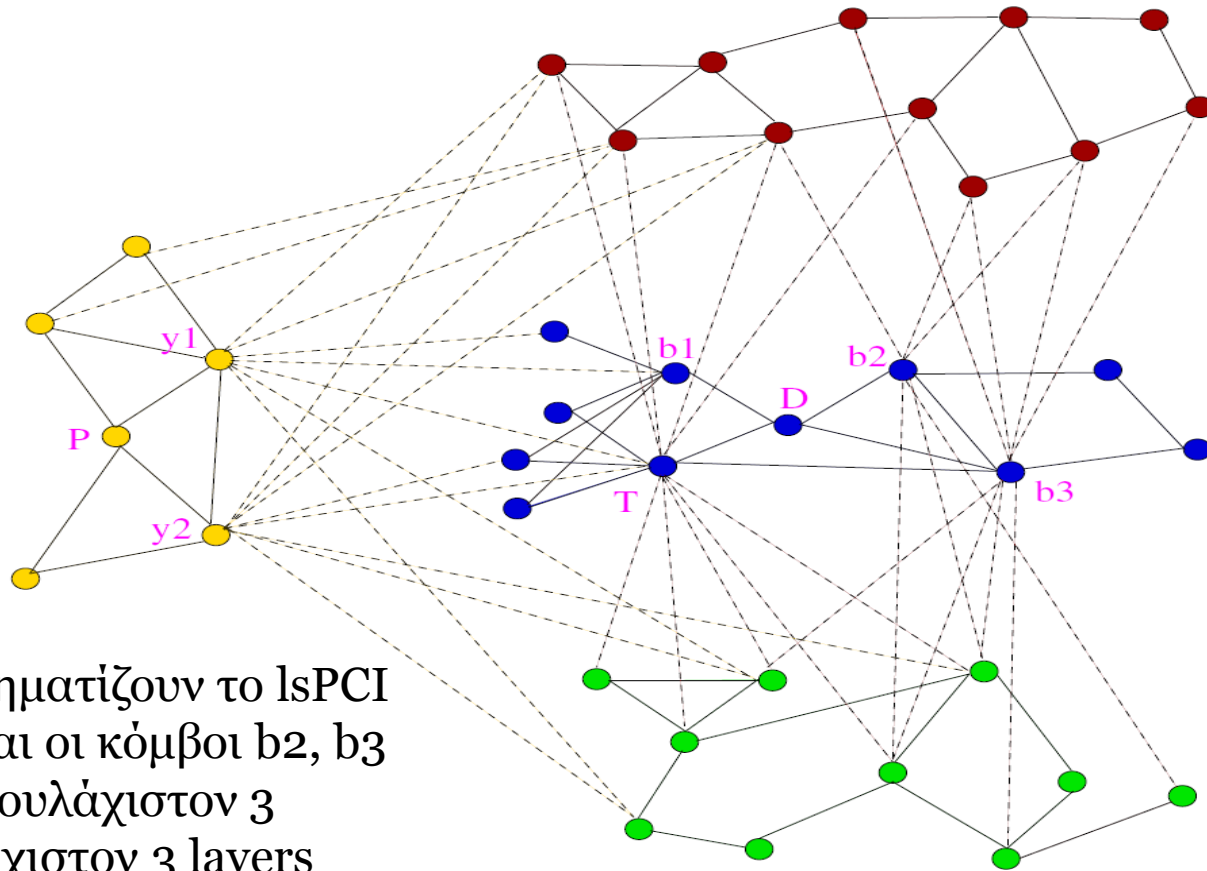
$$alPCI(P) = 2$$

# Layer-symmetric PCI (lsPCI)

- Ένας κόμβος  $u$  έχει  $lsPCI(u)=k$  όταν έχει  $k$  γείτονες στη 1-hop γειτονιά του, όπου καθένας από αυτούς έχει τουλάχιστον  $k$  γείτονες σε τουλάχιστον  $k$  layers, ενώ οι υπόλοιποι 1-hop γείτονες του  $u$  έχουν το πολύ  $k$  γείτονες προς  $k$  layers
- **Όμως** τι συμβαίνει όταν το πολυεπίπεδο δίκτυο αποτελείται από λίγα layers?



# Παράδειγμα lsPCI



Οι κόμβοι που σχηματίζουν το lsPCI του κόμβου D είναι οι κόμβοι b2, b3 και T που έχουν τουλάχιστον 3 γείτονες σε τουλάχιστον 3 layers

$$\text{lsPCI}(D)=3$$

## Minimal layers PCI ( $mlPCI_n$ )

- Ένας κόμβος  $u$  έχει  $mlPCI_n(u)=k$  όταν έχει  $k$  γείτονες στην 1-hop γειτονιά του, όπου καθένας από αυτούς έχει τουλάχιστον  $k$  γείτονες σε τουλάχιστον  $n$  layers, ενώ οι υπόλοιποι γείτονες του  $u$  έχουν το πολύ  $k$  γείτονες σε τουλάχιστον  $n$  layers

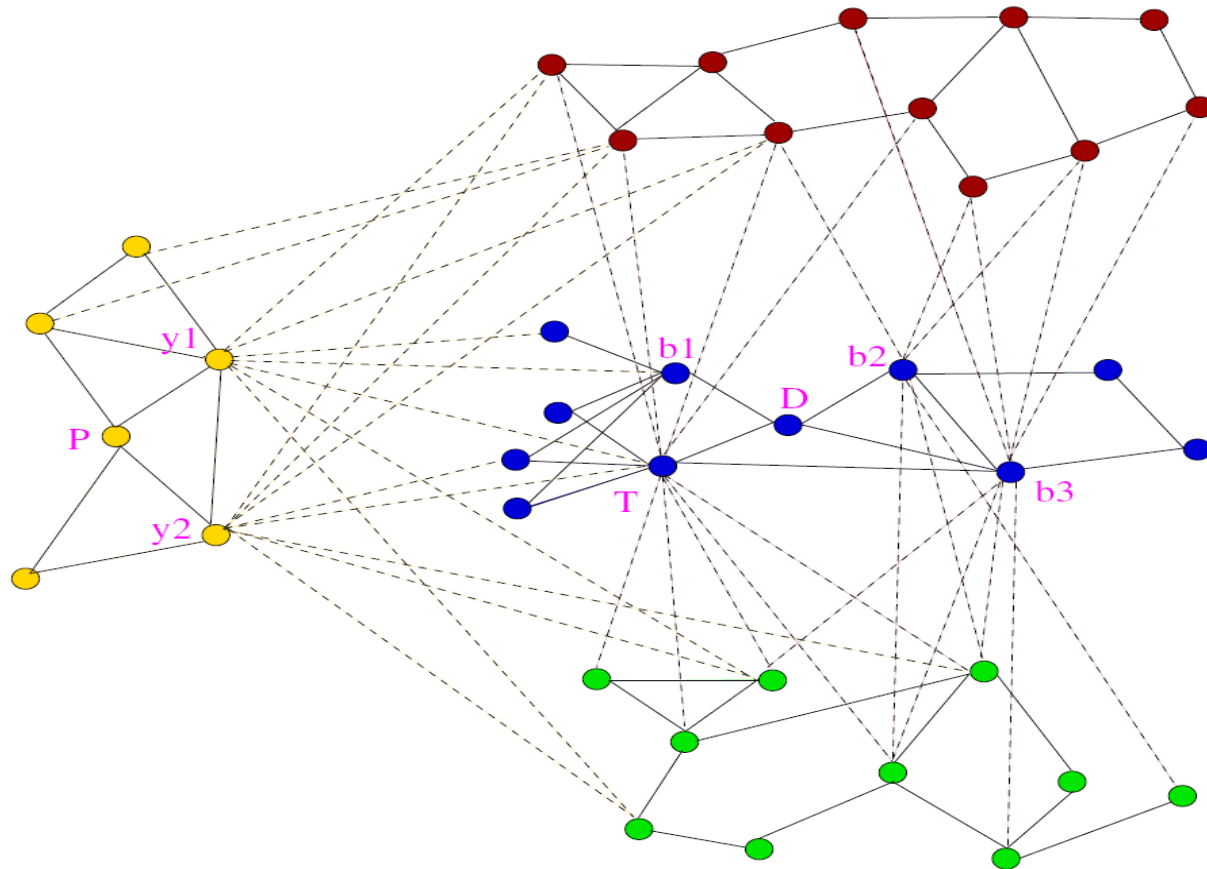
# Παράδειγμα $mPCI_n$

$$mPCI_1(D) = 3$$

$$mPCI_2(D) = 3$$

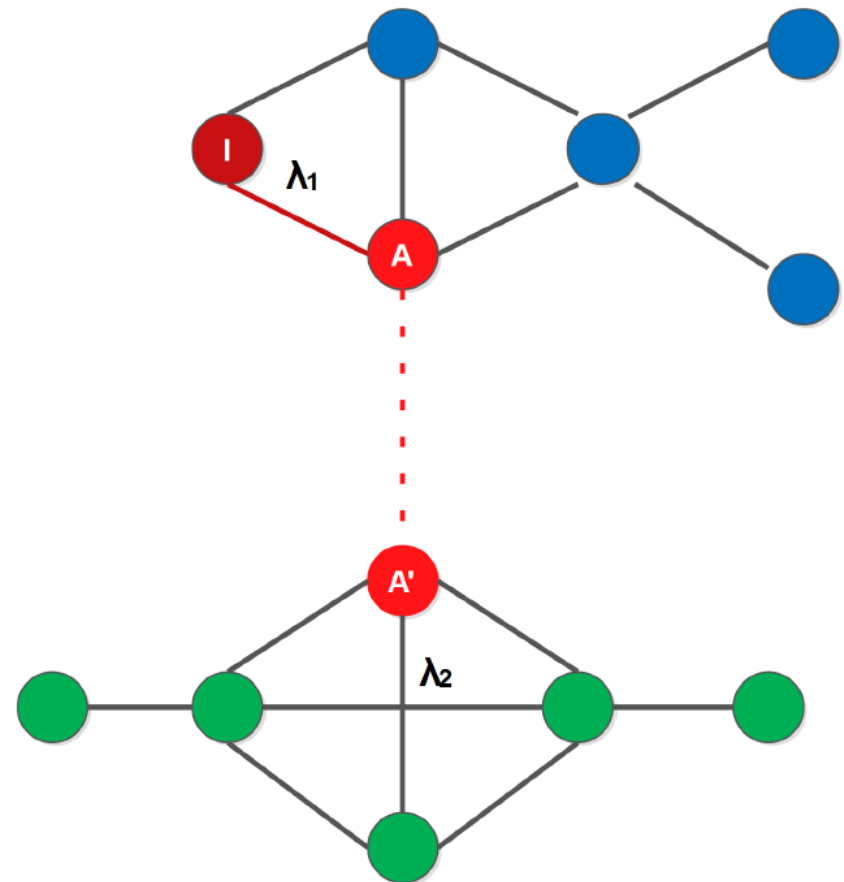
$$mPCI_3(D) = 3$$

$$mPCI_4(D) = 0$$



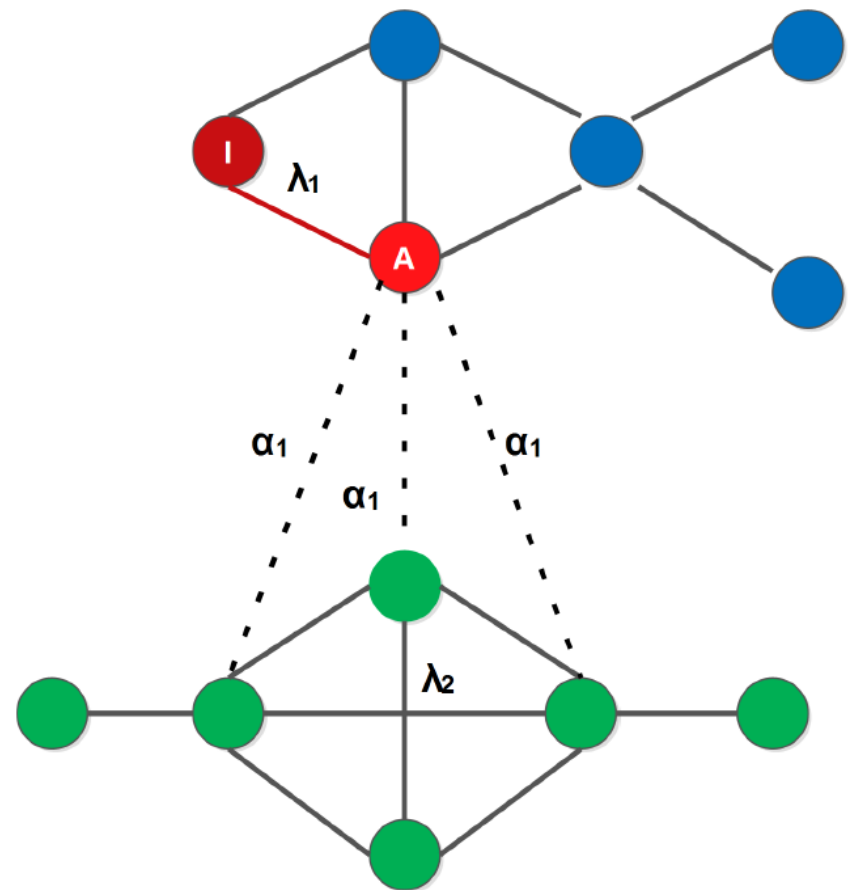
# Διάχυση πληροφορίας σε Multiplex δίκτυα

- Θυμηθείτε το μοντέλο **SIR**
- Ο κόμβος **I** στο μπλε layer μολύνει τον κόμβο **A**
- Ο **A'** στο πράσινο layer μολύνεται λόγω της μόλυνσης του **A** στο μπλε Layer
- **Κανόνες**
  - Διαφορετική πιθανότητα μόλυνσης ανά layer:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  - Όταν ένας κόμβος μολυνθεί σε ένα layer, όλοι οι «κλώνοι» του στα υπόλοιπα layers αυτόματα μολύνονται



# Διάχυση πληροφορίας σε Multilayer δίκτυα

- Ο **A** μολύνεται απο τον **I** στο μπλε δίκτυο, και στην συνέχεια θα έχει τη δυνατότητα να μολύνει τους γείτονες του στο πράσινο layer με πιθανότητα  $\alpha_1$
- **Κανόνες**
  - Διαφορετική πιθανότητα μόλυνσης ανα layer,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  - Διαφορετική πιθανότητα μόλυνσης απο layer σε layer

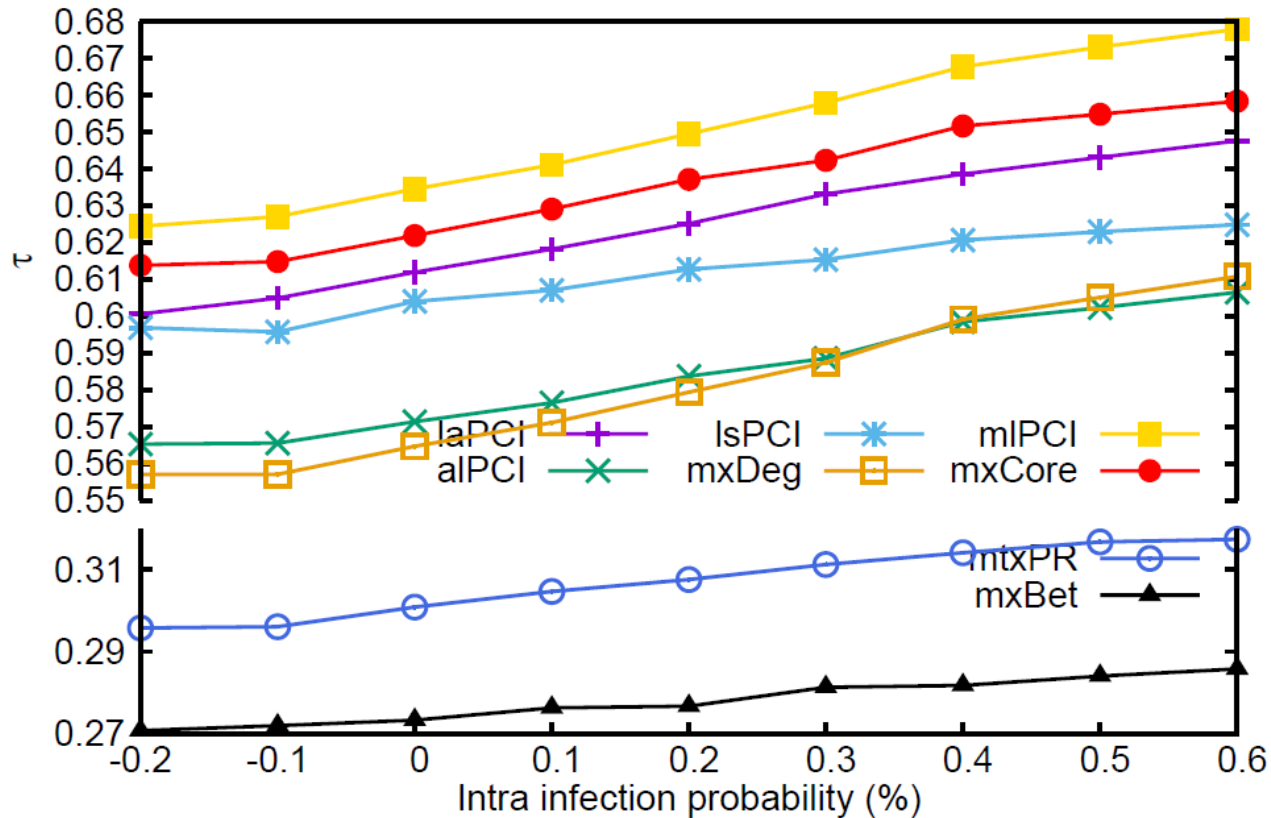


## Κόμβοι σημαίνουσας επιρροής σε διασυνδεδεμένα/πολυεπίπεδα δίκτυα?

- Στα single δίκτυα είδαμε τη διαφορά του  $rci$  με το degree και το k-shell
- Στα διασυνδεδεμένα δίκτυα ποιά τεχνική (degree, mlPCI, mxCore,..) θα ταξινομήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια τους κόμβους με βάση τη δύναμη επιρροής τους?

# Twitter (3 layers, *retweet*, *mentions* and *replies* )

MoscowAthletics2013



# Twitter (3 layers, *retweet*, *mentions* and *replies* )

