Προβλήματα με PageRank

Άσκηση. Να υπολογιστεί ο PageRank των κόμβων του εξής
symmetry
δικτύου:

Λύση.

Λόγω συμμετρίας: $x_1 = x_3$

$x_1 = 1-d+d\frac{x_2}{2}$

$x_2 = 1-d+dx_1$

$\Big\} \; x_2 = 1-d+d\left(1-d+d\frac{x_2}{2}\right) \Rightarrow$

$x_3 = 1-d+d\frac{x_2}{2}$

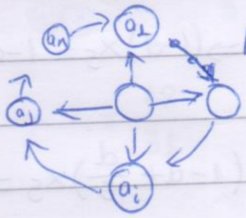
$\Rightarrow 2x_2 = 2-2d+2d-2d^2+d^2x_2 \Rightarrow (2-d^2)x_2 = 2(1-d^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2(1-d^2)}{2-d^2}}$

Συνεπώς: $x_1 = x_3 = 1-d+d\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}(1-d^2)}{(2-d^2)} = \frac{(1-d)(2-d^2)+d-d^3}{2-d^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = \frac{2-d^2-2d+\cancel{d^3}+d-\cancel{d^3}}{2-d^2} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3 = \frac{2-d-d^2}{2-d^2}}$

Άσκηση. Να υπολογιστεί ο PageRank των κόμβων του εξής
symmetry
δικτύου:



Λύση. Λόγω συμμετρίας: $x_{a_1} = x_{a_2} = \dots = x_{a_n} = x_a$

$x_h = 1-d$

$x_a = (1-d)+d x_h + d x_a \Rightarrow x_a = 1-d+d\frac{1-d}{n}+dx_a$

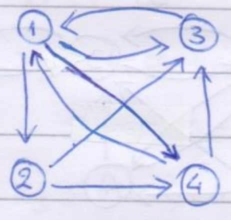
$\Rightarrow (1-d)x_a = 1-d+\frac{d}{n}-\frac{d^2}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-d)x_a = 1-d+\frac{d}{n}(1-d) \Rightarrow \boxed{x_a = 1+d/n}$

Άσκηση. Να υπολογιστεί ο PageRank των κόμβων του εξής δικτύου, χωρίς teleportation.

PR≠inDeg

[Η άσκηση δείχνει ότι: α) $Pr(x) \neq$ in-degree(x)
β) counter-intuitive ranking]



Λύση.

$x_1 = x_3 + x_4/2$ (1)

$x_2 = x_1/3$ (2)

$x_3 = x_1/3 + x_4/2 + x_2/2$ (3)

$x_4 = x_1/3 + x_2/2$ (4)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (5)

$(4) \xRightarrow{(2)} x_4 = x_1/3 + \frac{1}{2} x_1/3 \Rightarrow x_4 = x_1/3 + x_1/6 \Rightarrow x_4 = x_1/2$ (6)

$(3) \xRightarrow{(6)} x_3 = x_1/3 + \frac{1}{2} x_1/2 + x_1/6 = \frac{4}{12} x_1 + \frac{3}{12} x_1 + \frac{2}{12} x_1 \Rightarrow x_3 = \frac{9}{12} x_1$ (7)

$(5) \xRightarrow[(6)(7)]{(2)} x_1 + \frac{1}{3} x_1 + \frac{9}{12} x_1 + \frac{1}{2} x_1 = 1 \Rightarrow x_1 (1 + 1/3 + 9/12 + 1/2) = 1$

$\Rightarrow x_1 = \frac{12}{31}$ Άρα $x_2 = \frac{4}{31}$, $x_3 = \frac{9}{31}$, $x_4 = \frac{6}{31}$

Άρα rank vector $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [12 \ 4 \ 9 \ 6]$

Με μόνο δυο incoming links, ο 1 είναι σημαντικότερος (κατά PageRank) από τον 3, διότι το ένα από αυτά προέρχεται από τον πολύ σημαντικό κόμβο 3!

Άσκηση. Να υπολογίσετε το PageRank των κόμβων αφού προσθέσετε έναν επιπλέον κόμβο, τον 5 ο οποίος ανταλλάσει links με τον 3.

Ορθή PR circulation

Λύση.

$x_1 = x_3/2 + x_4/2$ (1)

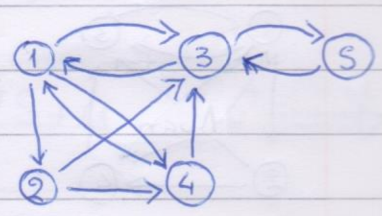
$x_2 = x_1/3$ (2)

$x_3 = x_1/3 + x_2/2 + x_4/2 + x_5$ (3)

$x_4 = x_1/3 + x_2/2$ (4)

$x_5 = x_3/2$ (5)

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1$ (6)



$x_4 = x_1/3 + \frac{1}{2} x_1/3 \Rightarrow x_4 = x_1/2$ (7)

$x_3 = x_1/3 + 1/2\, x_1/3 + \frac{1}{2} x_1/2 + x_3/2 \Rightarrow \frac{x_3}{2} = \frac{4}{12} x_1 + \frac{2}{12} x_1 + \frac{3}{12} x_1$

$\Rightarrow x_3/2 = \frac{9}{12} x_1 \Rightarrow x_3 = 3/2\, x_1$

Άρα $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 18 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Ο 3 έγινε ο πιο σημαντικός κόμβος τώρα. Γιατί?

Άσκηση. Έστω ότι $M = (1-m)A + mS$, όπου $0 \le m \le 1$ και $S = \left[\frac{1}{n}\right]_{n \times n}$, και A είναι row-stochastic $Ae = e$

Να δειχθεί ότι: $Me = e$

Λύση. $Me = (1-m)Ae + mSe = (1-m)e + me \Rightarrow$

$\Rightarrow Me = e$ Ο.Ε.Δ.