



# Σύνθετα Δίκτυα

**com+plex: with+ -fold (having parts)**

Διδάσκων –  
Δημήτριος Κατσαρός



Μετρικές κεντρικότητας

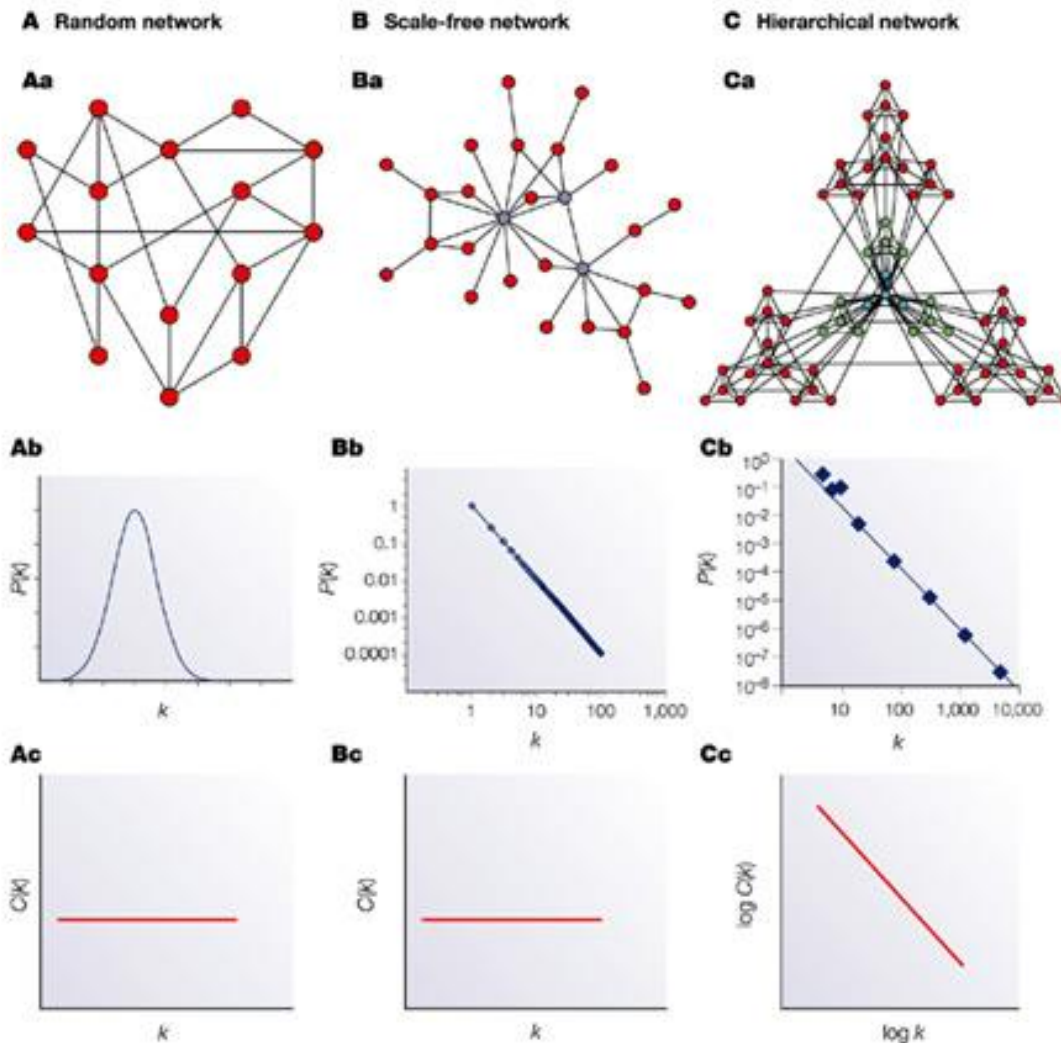
Centrality measures



# Περιεχόμενα

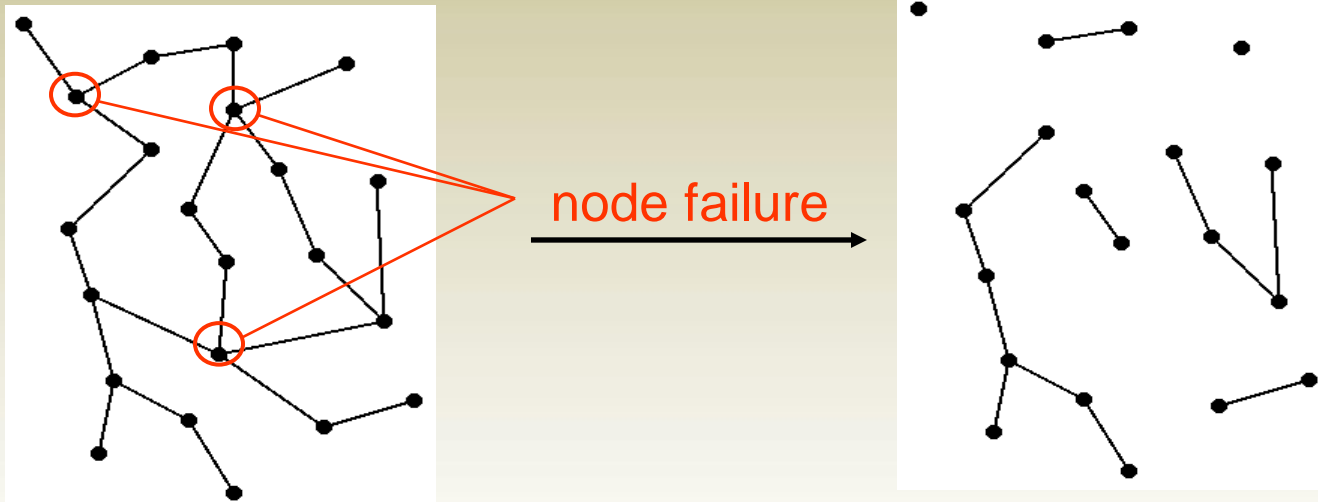
- Κεντρικότητα βαθμού (degree centrality)
  - Centralization
- Ενδιάμεση κεντρικότητα (betweenness centrality)

# Τοπολογία δικτύων



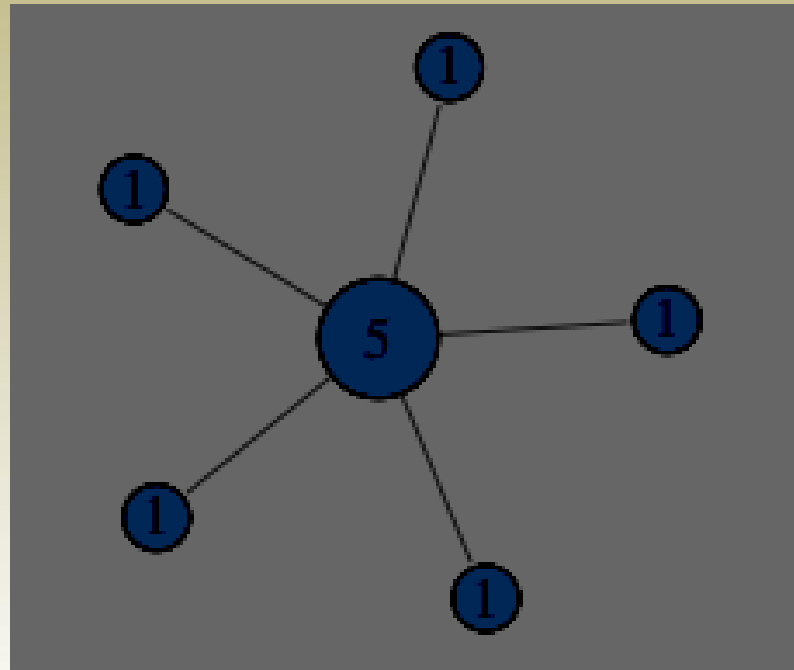
# Πραγματικά δίκτυα

Τα σύνθετα συστήματα διατηρούν τις βασικές τους ιδιότητες όταν συμβαίνουν σφάλματα και αποτυχίες (cell → mutations; Internet → router breakdowns)



# Degree centrality

Αυτός που έχει πολλούς φίλους είναι σημαντικός



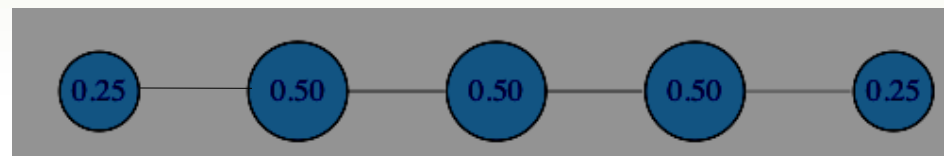
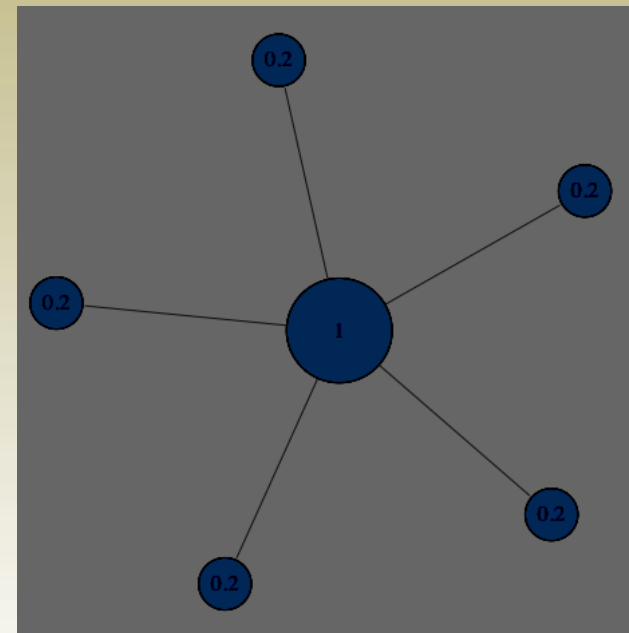
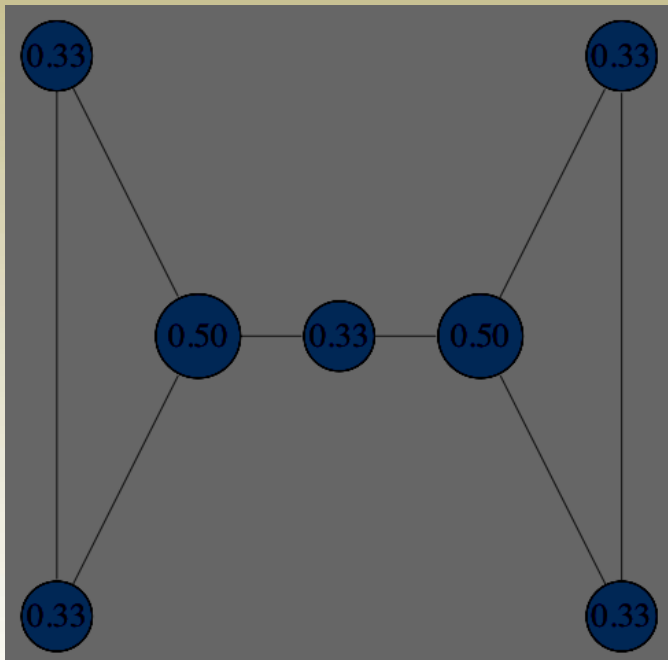
Πότε είναι ο αριθμός των συνδέσεων η καλύτερη μετρική κεντρικότητας;

- άνθρωποι που μας κάνουν χάρες
- άνθρωποι στους οποίους μπορούμε να μιλήσουμε



# Normalized degree centrality

Διαιρεμένη με max. **possible**, δηλαδή  $(N-1)$ , ή με τη max. **existing**





# Centralization: Πόσο ίσοι είναι οι κόμβοι;

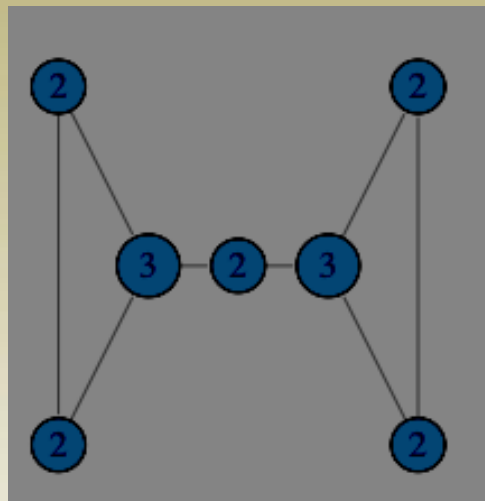
Η γενική εξίσωση του Freeman για τη centralization:

μέγιστη τιμή στο δίκτυο

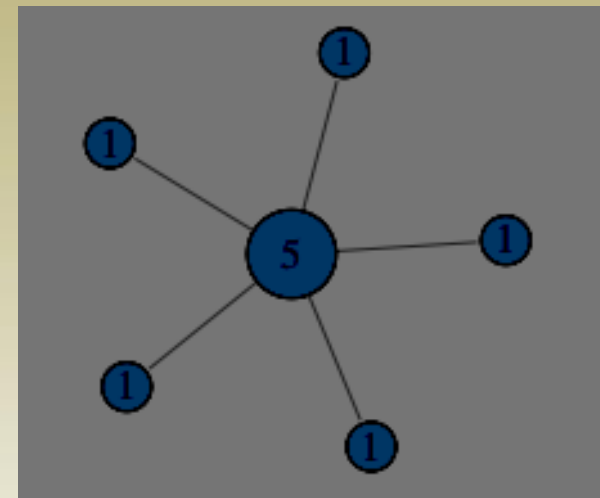
$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^g [C_D(n^*) - C_D(i)]}{[(N-1)(N-2)]}$$



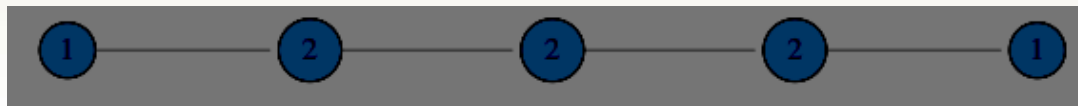
# Παραδείγματα degree centralization



$$C_D = 0.167$$



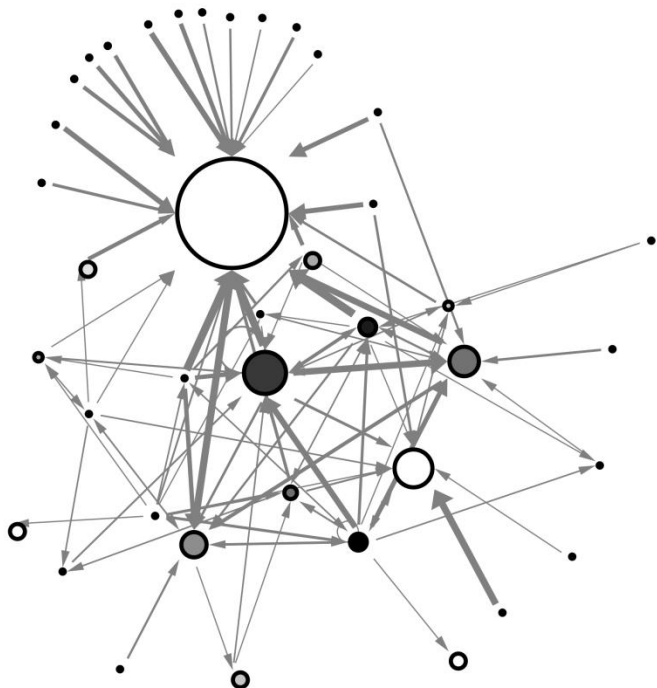
$$C_D = 1.0$$



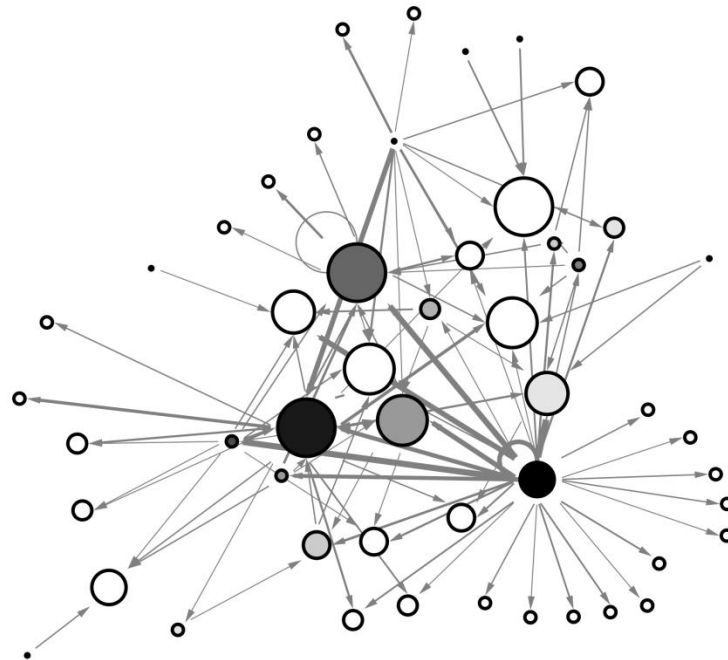
$$C_D = 0.167$$

# Παραδείγματα degree centralization

financial trading networks



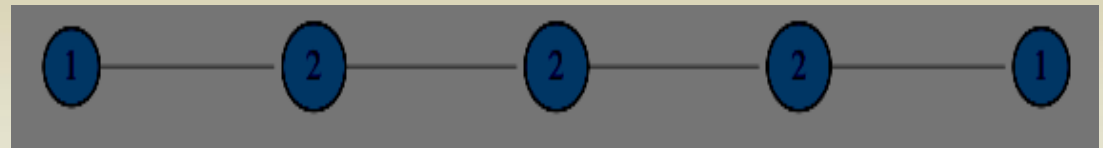
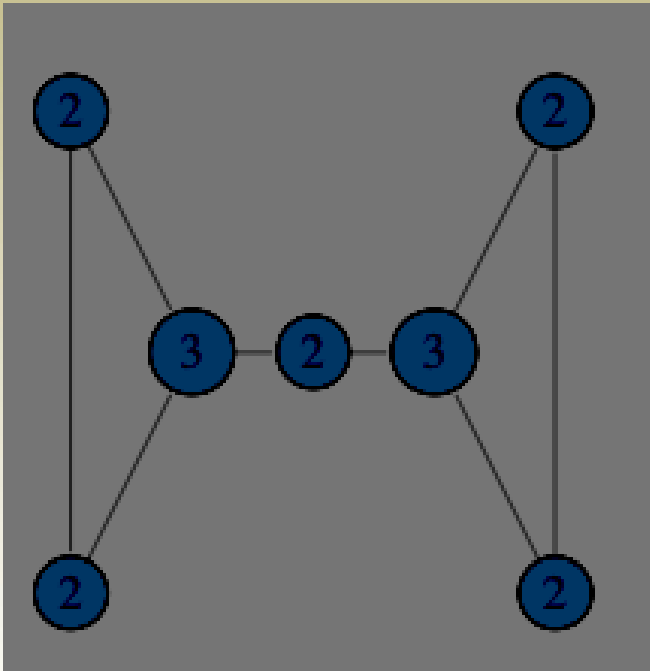
**high centralization:** one node trading with many others



**low centralization:** trades are more evenly distributed

# Όταν ο βαθμός δεν είναι τα πάντα ...

Με ποιους τρόπους αποτυγχάνει ο βαθμός να συλλάβει την κεντρικότητα στα επόμενα γραφήματα;



- Ικανότητα να μεσολαβείς (broker) μεταξύ ομάδων
- Πιθανότητα ότι πληροφορία που πηγάζει από οπουδήποτε στο δίκτυο περνάει από κάποιον κόμβο ...

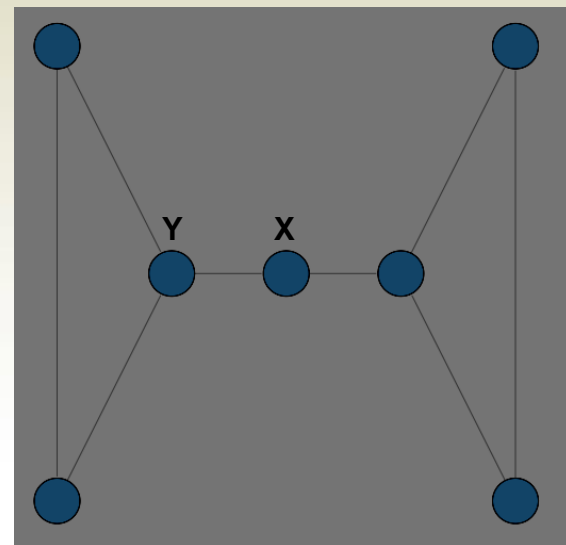
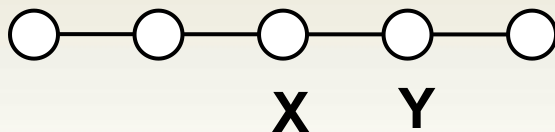
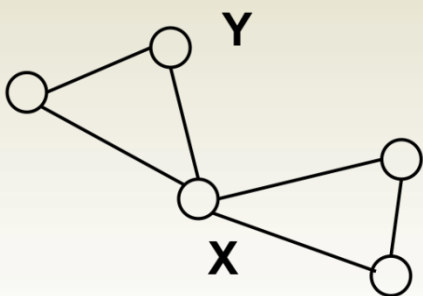


# Περιεχόμενα

- Κεντρικότητα βαθμού (degree centrality)
  - Centralization
- Ενδιάμεση κεντρικότητα συντομοτέρων μονοπατιών (shortest-path betweenness centrality, SPBC)

# Ενδιαμεσότητα (betweenness)

- **διαίσθηση:** πόσων ζευγών κόμβων η επικοινωνία περνάει δια μέσου κάποιου συγκεκριμένου κόμβου όταν η επικοινωνία γίνεται με τα συντομότερα μονοπάτια;
- Ποιος έχει μεγαλύτερη ενδιαμεσότητα, ο X ή ο Y?



# Ενδιαμεσότητα (betweenness): Ορισμός

$$C_B(i) = \sum_{j < k} g_{jk}(i) / g_{jk}$$

όπου  $g_{jk}$  = ο αριθμός των γεωδαισικών που συνδέουν  $jk$ ,  
και  $g_{jk}(i)$  = ο αριθμός των μονοπατιών που ο  $i$  είναι πάνω

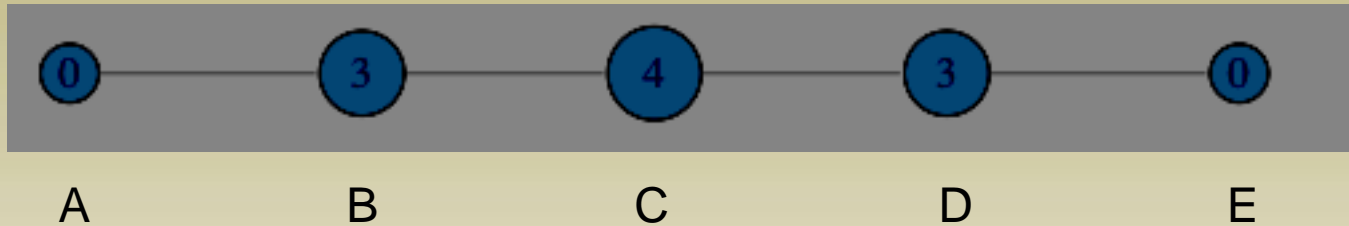
Συνήθως, κανονικοποιημένη:

$$C'_B(i) = C_B(i) / [(n-1)(n-2)/2]$$

αριθμός ζευγών κόμβων, εκτός του ίδιου του κόμβου που εξετάζουμε (για μη κατευθυνόμενα δίκτυα)

# Η ενδιαμεσότητα σε μικρά δίκτυα

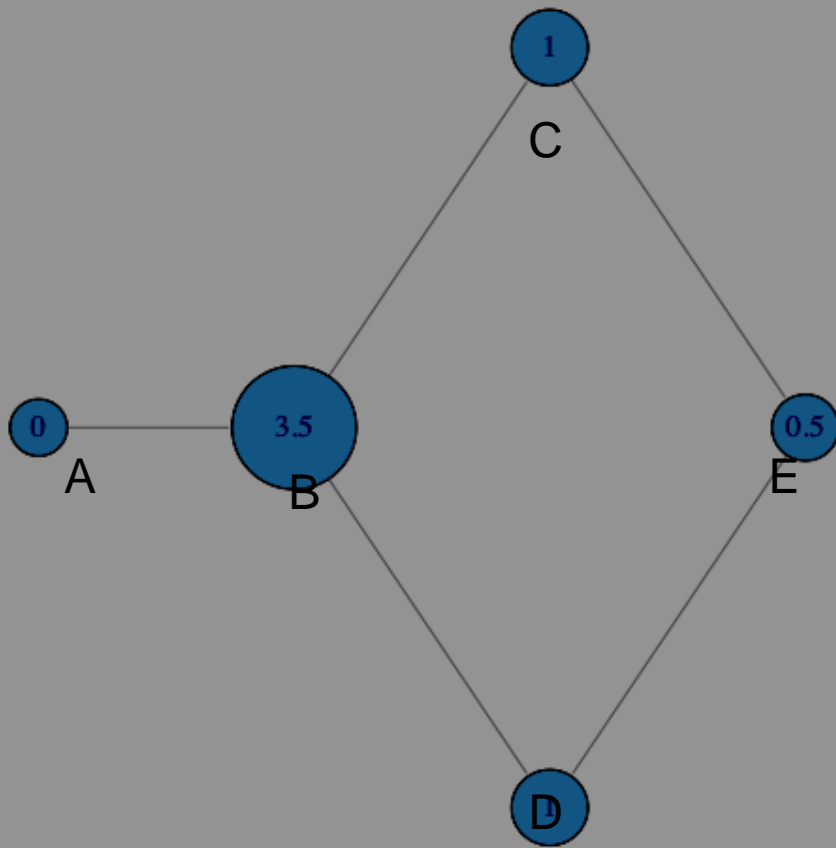
- Μη κανονικοποιημένη εκδοχή:



- Ο A δεν μεσολαβεί μεταξύ κανενός ζεύγους κόμβων
- Ο B είναι μεταξύ του A και 3 άλλων κόμβων: C, D, και E
- Ο C είναι μεταξύ 4 ζευγών κόμβων (A,D),(A,E),(B,D),(B,E)
- Να σημειωθεί ότι δεν υπάρχουν εναλλακτικά μονοπάτια για να πάρουν τα ζεύγη αυτά, έτσι ο C παίρνει όλο το credit

# Η ενδιαμεσότητα σε μικρά δίκτυα

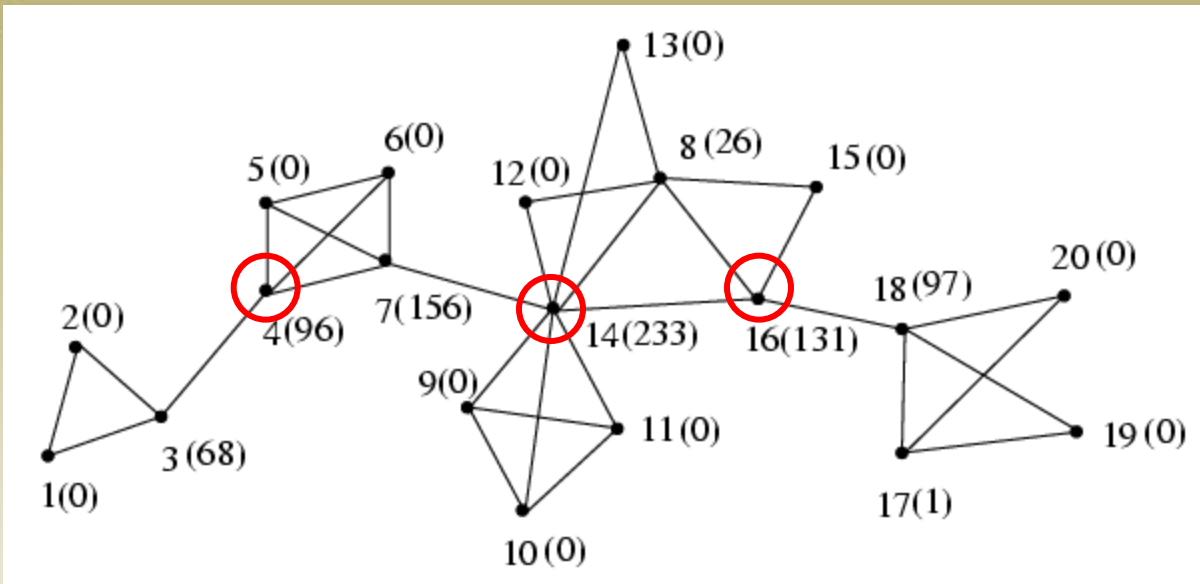
- Μη κανονικοποιημένη εκδοχή:



- Γιατί ο C και D έχουν ο καθένας betweenness ίση με 1?
- Και οι δυο είναι σε shortest paths για τα ζεύγη (A,E), και (B,E), και έτσι πρέπει να μοιραστούν την πίστωση:
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- Μπορείτε να σκεφτείτε γιατί ο B έχει betweenness ίση με 3.5, ενώ ο E έχει betweenness ίση με 0.5;



# SPBC σε μεγαλύτερα δίκτυα

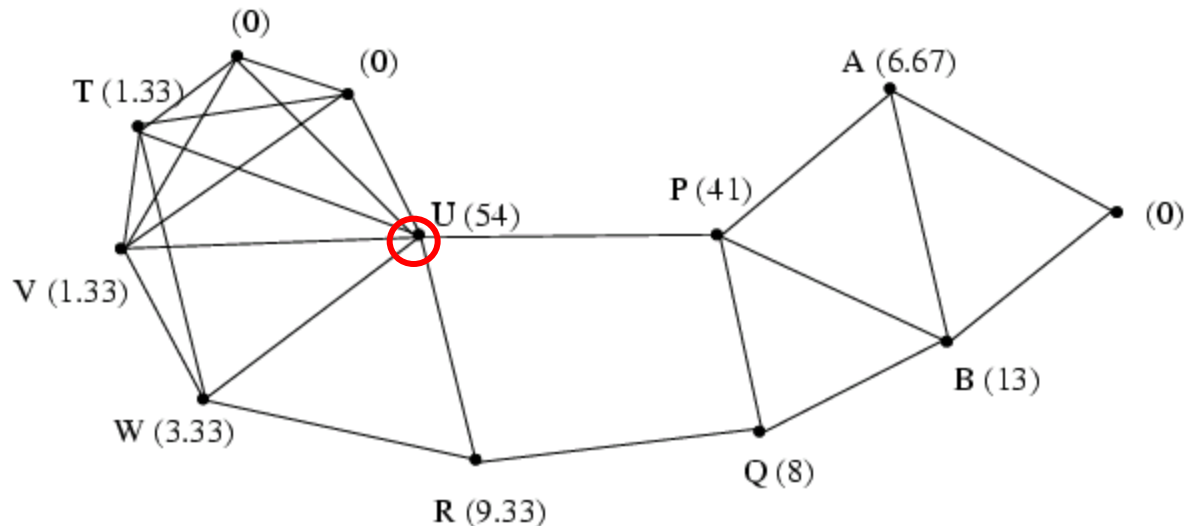


Σε παρενθέσεις, η SPBC του κόμβου. Δηλ., 7(156): κόμβος με ID 7 έχει SPBC ίση με 156

Κόμβοι με μεγάλη SPBC:

- Κόμβοι διάρθρωσης (articulation nodes) (σε γέφυρες), π.χ., 3, 4, 7, 16, 18
- Με large fanout, π.χ., 14, 8, U

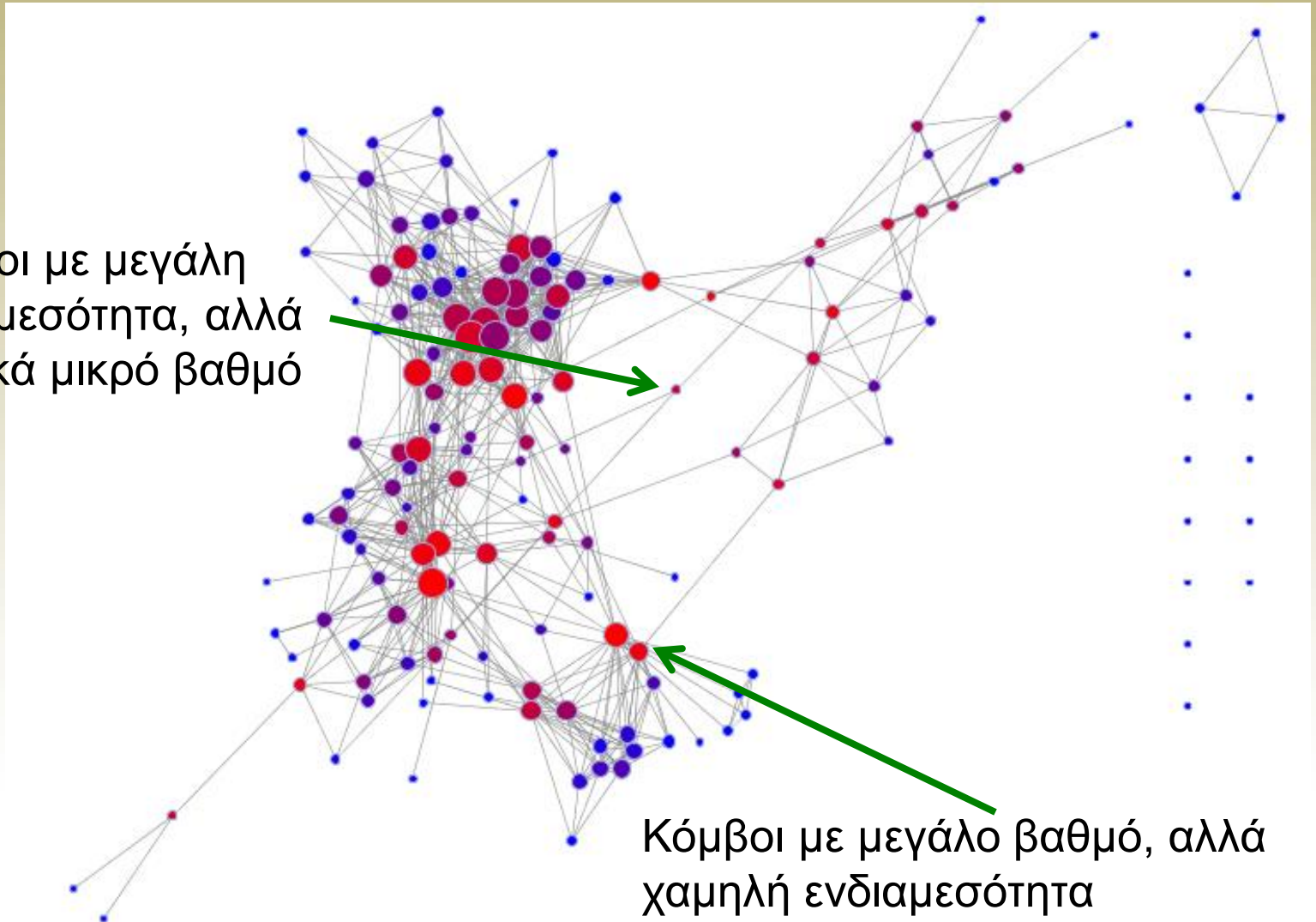
Επομένως: **geodesic** κόμβοι



# Συσχέτιση βαθμού-ενδιάμεσης κεντρικότητας

Οι κόμβοι έχουν μέγεθος ανάλογο με το βαθμός τους, και χρώμα ανάλογα με την betweenness

Κόμβοι με μεγάλη  
ενδιαμεσότητα, αλλά  
σχετικά μικρό βαθμό

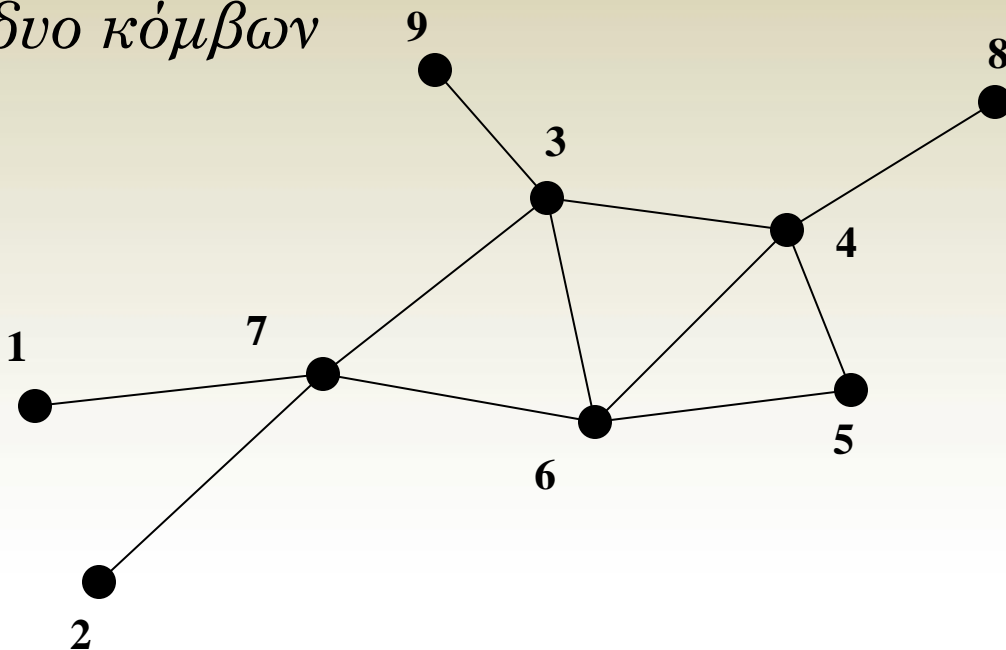


Κόμβοι με μεγάλο βαθμό, αλλά  
χαμηλή ενδιαμεσότητα

# SPBC

Εάν η Shortest Path Betweenness Centrality (SPBC):

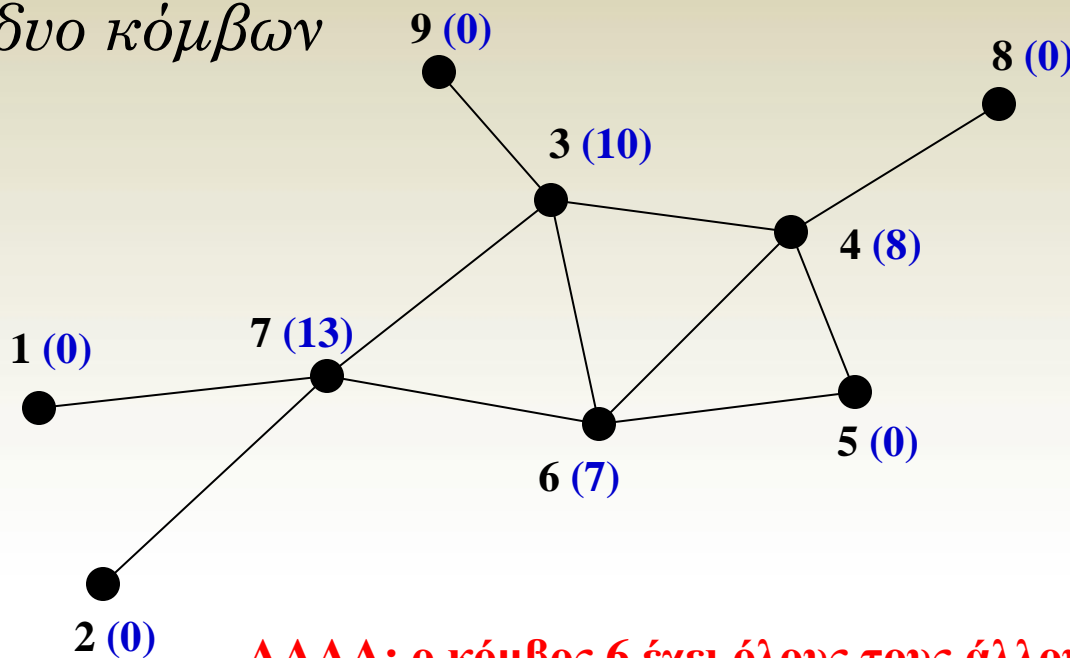
- Ο SPBC δείκτης ενός κόμβου είναι ίσο με το κλάσμα του αριθμού των *συντομότερων μονοπατιών μεταξύ ζευγών κόμβων που περνάνε από τον κόμβο αυτό, προς το συνολικό αριθμό συντομοτέρων μονοπατιών μεταξύ του ζεύγους των δυο κόμβων*



# “Προβλήματα” της SPBC

Εάν η Shortest Path Betweenness Centrality (SPBC):

- Ο SPBC δείκτης ενός κόμβου είναι ίσο με το κλάσμα του αριθμού των *συντομότερων μονοπατιών μεταξύ ζευγών κόμβων που περνάνε από τον κόμβο αυτό, προς το συνολικό αριθμό συντομοτέρων μονοπατιών μεταξύ του ζεύγους των δυο κόμβων*



Node ranking

7

3

4

6

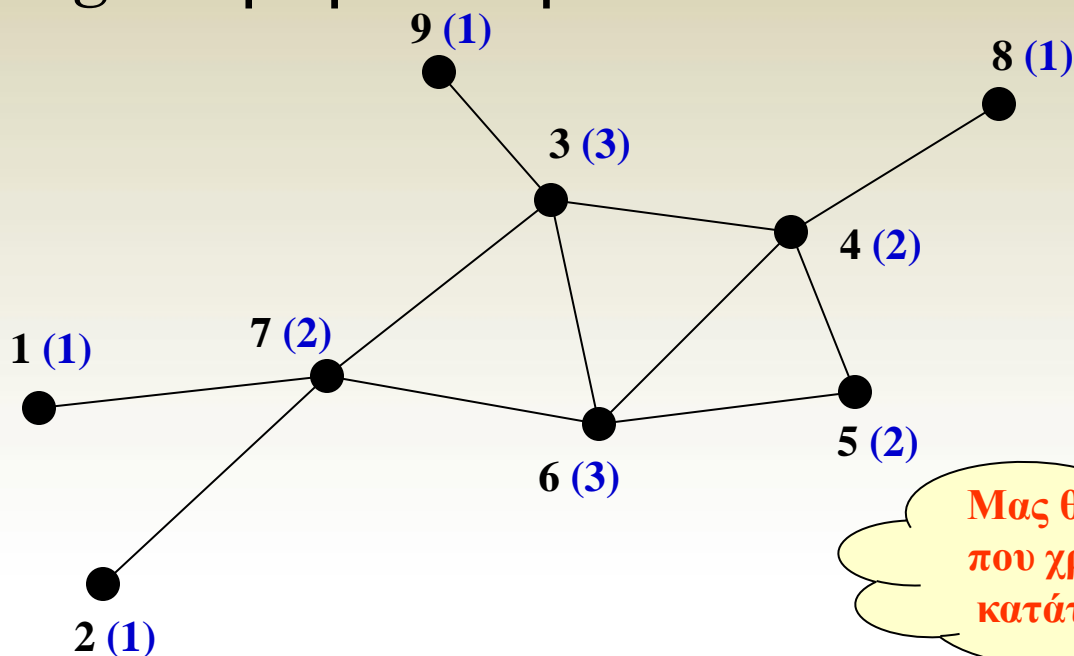
the rest of nodes

**ΑΛΛΑ: ο κόμβος 6 έχει όλους τους άλλους κόμβους στη γειτονιά του**

# Power Community Index

Power Community Index (PCI):

- Ο PCI index ενός κόμβου είναι  $k$ , iff δεν υπάρχουν περισσότεροι από  $k$  1-hop γείτονες του κόμβου με degree μεγαλύτερο από  $k$  (και υπόλοιποι έχουν degree ίσο ή μικρότερο από  $k$ )

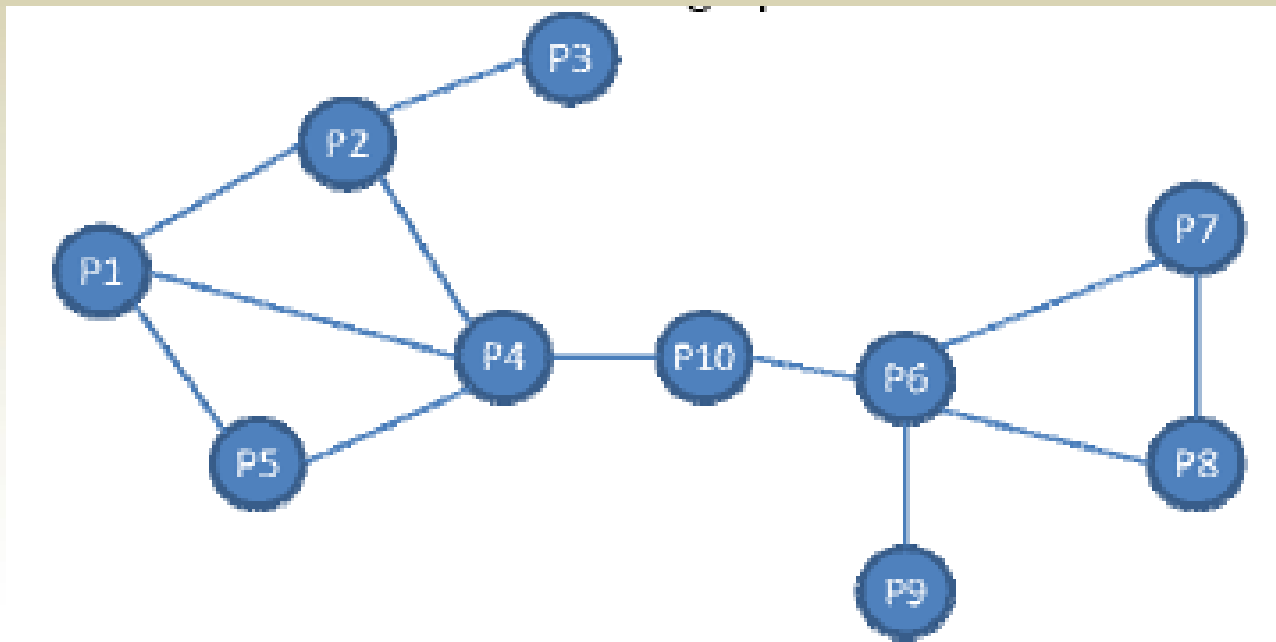


Μας θυμίζει τον h-index που χρησιμοποιείται για κατάταξη επιστημόνων

# Ασκήσεις

## Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε τις τιμές του SPBC για κάθε κόμβο του παρακάτω σχήματος. Στον πίνακα που έπεται δίνονται όλα τα συντομότερα μονοπάτια.



# Ασκήσεις

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
P1	-	P1, P2	P1, P2, P3	P1, P4	P1, P5	P1, P4, P10, P6	P1, P4, P10, P6, P7	P1, P4, P10, P6, P8	P1, P4, P10, P6, P9	P1, P4, P10
P2		-	P2, P3	P2, P4	P2, P1, P5 : P2, P4, P5	P2, P4, P10, P6	P2, P4, P10, P6, P7	P2, P4, P10, P6, P8	P2, P4, P10, P6, P9	P2, P4, P10
P3			-	P3, P2, P4	P3, P2, P1, P5 : P3, P2, P4, P5	P3, P2, P4, P10, P6	P3, P2, P4, P10, P6, P7	P3, P2, P4, P10, P6, P8	P3, P2, P4, P10, P6, P9	P3, P2, P4, P10
P4				-	P4, P5	P4, P10, P6	P4, P10, P6, P7	P4, P10, P6, P8	P4, P10, P6, P9	P4, P10
P5					-	P5, P4, P10, P6	P5, P4, P10, P6, P7	P5, P4, P10, P6, P8	P5, P4, P10, P6, P9	P5, P4, P10
P6						-	P6, P7	P6, P8	P6, P9	P6, P10
P7							-	P7, P8	P7, P6, P9	P7, P6, P10
P8								-	P8, P6, P9	P8, P6, P10
P9									-	P9, P6, P10
P10										-