Σύνθετα Δίκτυα

com+plex: with+ -fold (having parts)

Διδάσκων –
Δημήτριος Κατσαρός

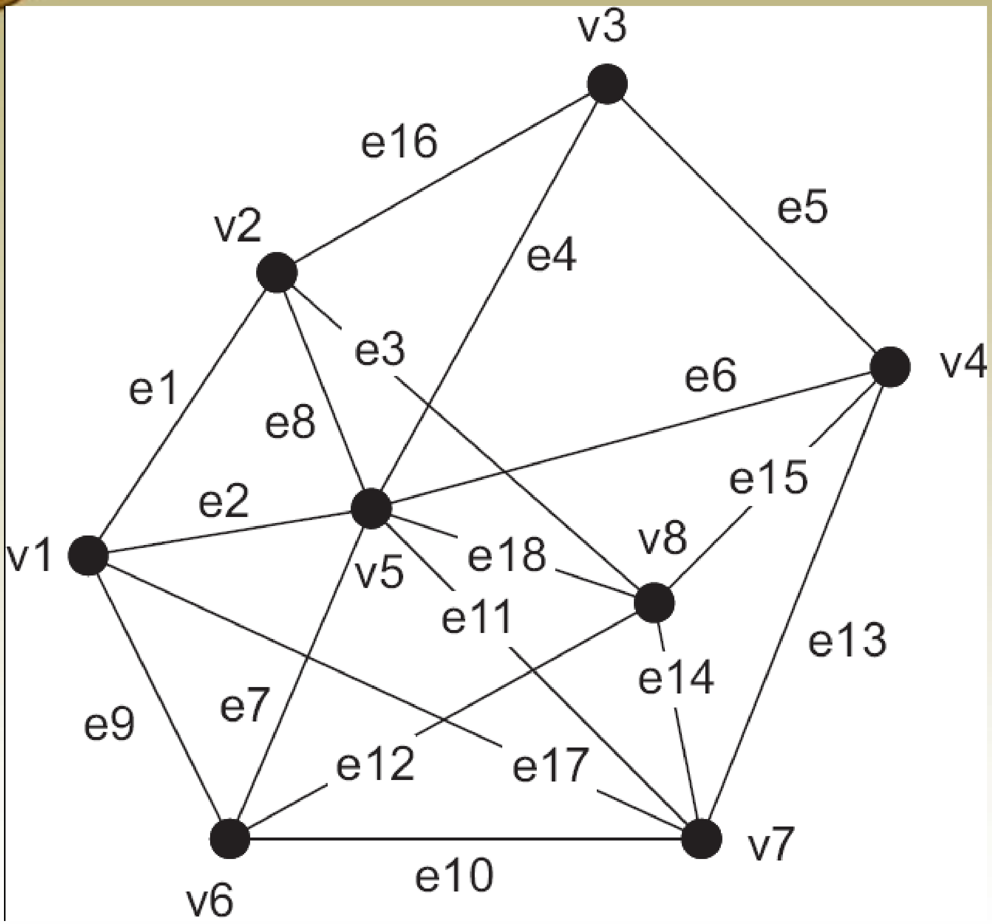
Εισαγωγικές έννοιες

Γράφημα: Ορισμός

- Ένα γράφημα G είναι ένα ζεύγος (V,E), με κορυφές στο σύνολο V και μια συλλογή ακμών E
- Κάθε ακμή $e \in E$ θα λέμε ότι συνδέει δυο κορυφές $u,v \in V$, και θα συμβολίζεται ως $e = <u,v>$
- Συμβολισμός: V(G), E(G)
- Το συμπλήρωμα G’ ενός γραφήματος G, έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το G, αλλά $e \in E(G')$ εάν και μόνο εάν $e \notin E(G)$
- Για κάθε γράφημα G και κορυφή $v \in V(G)$, το σύνολο γειτόνων N(v) της v είναι το σύνολο κορυφών (εκτός της v) που πρόσκεινται στη v

$$N(v) = \{w \in V(G) \mid v \mathrel{!=} w, <v,w> \in E(G)\}$$

Γράφημα: Παράδειγμα



$$V(G) = \{v_1, \ldots, v_8\}$$
$$E(G) = \{e_1, \ldots, e_{18}\}$$

$e_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$	$e_{10} = \langle v_6, v_7 \rangle$
$e_2 = \langle v_1, v_5 \rangle$	$e_{11} = \langle v_5, v_7 \rangle$
$e_3 = \langle v_2, v_8 \rangle$	$e_{12} = \langle v_6, v_8 \rangle$
$e_4 = \langle v_3, v_5 \rangle$	$e_{13} = \langle v_4, v_7 \rangle$
$e_5 = \langle v_3, v_4 \rangle$	$e_{14} = \langle v_7, v_8 \rangle$
$e_6 = \langle v_4, v_5 \rangle$	$e_{15} = \langle v_4, v_8 \rangle$
$e_7 = \langle v_5, v_6 \rangle$	$e_{16} = \langle v_2, v_3 \rangle$
$e_8 = \langle v_2, v_5 \rangle$	$e_{17} = \langle v_1, v_7 \rangle$
$e_9 = \langle v_1, v_6 \rangle$	$e_{18} = \langle v_5, v_8 \rangle$

Ποιο είναι το σύνολο γειτόνων του v_6;

Βαθμός κορυφής

- Ο αριθμός ακμών που πρόσκεινται σε μια κορυφή, λέγεται *βαθμός της κορυφής* v, συμβολίζεται με d(v)
- Οι βρόχοι προσμετρώνται δυο φορές

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Για όλα τα γραφήματα G, $\Sigma_{\{v \in V(G)\}}$ $\delta(v)$ είναι $2 \cdot |E(G)|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Όταν μετράμε τις ακμές ενός γραφήματος G απαριθμώντας τις ακμές που πρόσκεινται σε κάθε κορυφή του G, στην ουσία μετράμε κάθε ακμή ακριβώς δυο φορές

Βαθμός κορυφής

- Η ακολουθία βαθμών είναι μια λίστα, σε φθίνουσα διάταξη, των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος. Μια ακολουθία βαθμών είναι *γραφική (graphic)* εάν υπάρχει ένα (απλό) γράφημα που να έχει αυτή την ακολουθία

ΘΕΩΡΗΜΑ [Havel-Hakimi].

Μια ακολουθία βαθμών $s = [k,d_1,d_2, . . . ,d_{n-1}]$ είναι γραφική, εάν και μόνο εάν η ακολουθία

$s^* = [d_1-1,d_2-1, . . . ,d_{k-1},d_{k+1}, . . . ,d_{n-1}]$ είναι επίσης γραφική

Σημείωση.

Το μήκος της $s = n$, αλλά το μήκος της $s^* = n-1$

Πρακτική κατασκευή …

Assume the degree sequence is S $S = d_1, d_2, d_{3,} \cdots, d_n$

$d_i \geq d_{i+1}$

1. If any $d_i \geq n$ then fail
2. If there is an odd number of odd degrees then fail
3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

Note: steps 1 and 2 are a pre-process

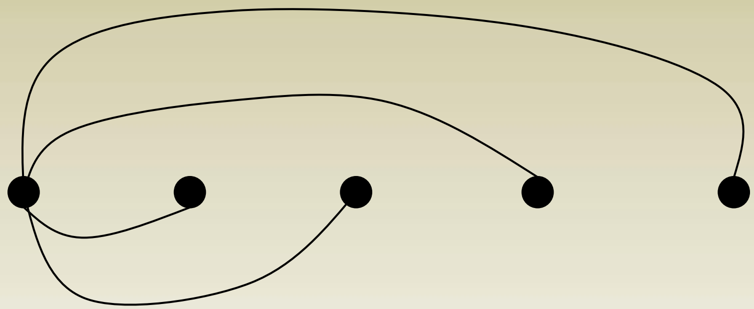
Πρακτική κατασκευή …

S = 4,3,3,3,1

3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

S = 4,3,3,3,1

Πρακτική κατασκευή …



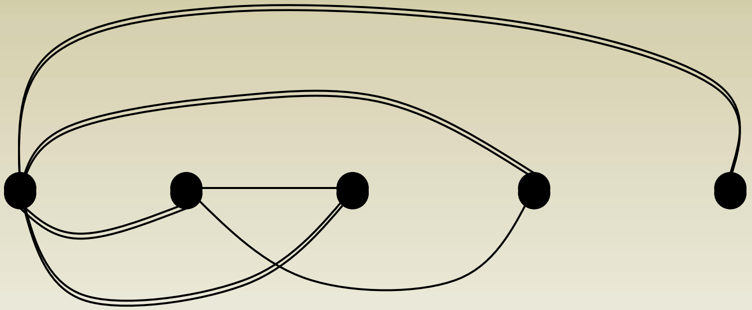
S = 2,2,2,0

3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

S = 4,3,3,3,1

Πρακτική κατασκευή ...

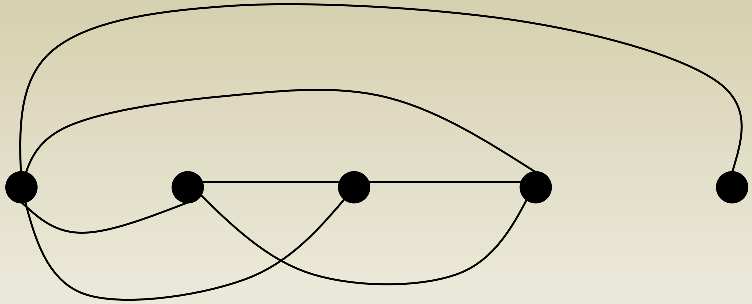
S = 1,1,0



3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

S = 4,3,3,3,1

Πρακτική κατασκευή …



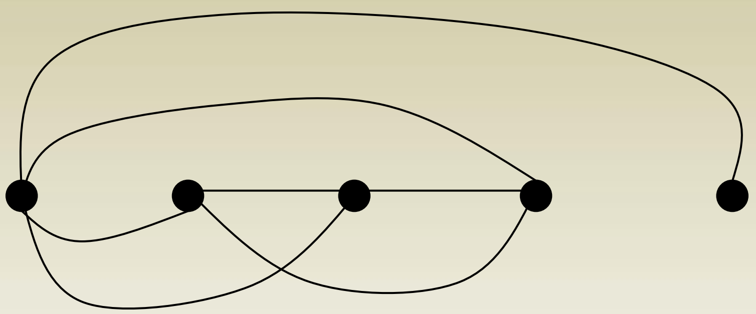
S = 0,0

3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

S = 4,3,3,3,1

Πρακτική κατασκευή …

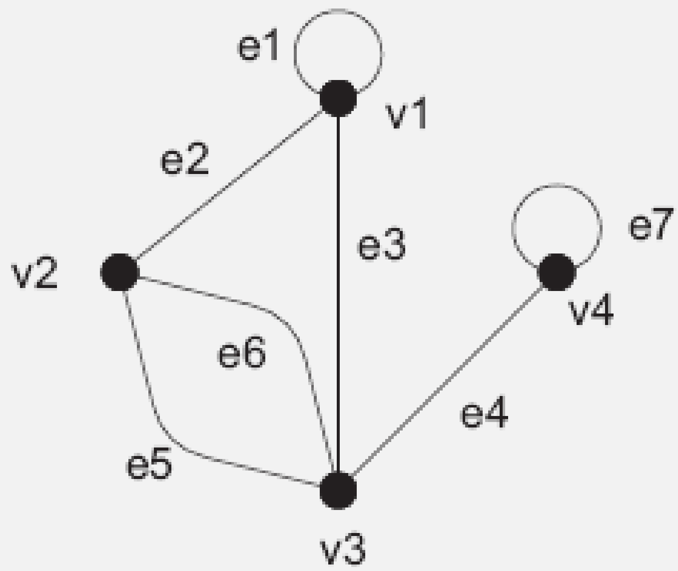
Report Success



3. If there is a $d_i < 0$ then fail
4. If all $d_i = 0$ then report success
5. Reorder S into non-increasing order
6. Let $k = d_1$
7. Remove d_1 from S.
8. Subtract 1 from the first k terms remaining of the new sequence
9. Go to step 3 above

S = 4,3,3,3,1

Πίνακας γειτνίασης

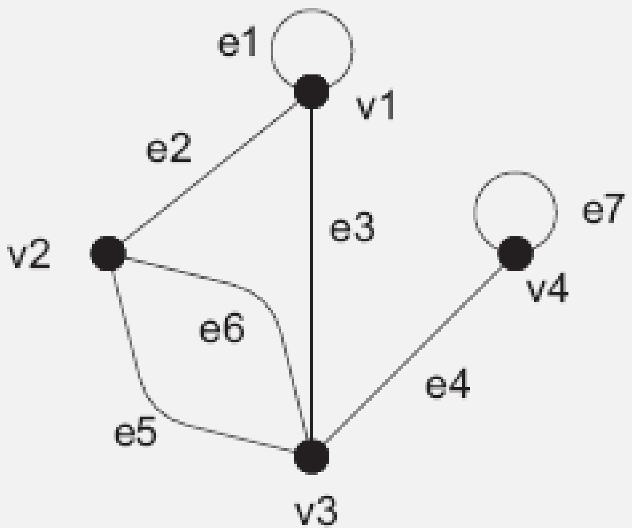


	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	2	1	1	0
v_2	1	0	2	0
v_3	1	2	0	1
v_4	0	0	1	2

Παρατηρήσεις.

- Ο πίνακας γειτνίασης είναι συμμετρικός: A[i, j] = A[j, i]
- Το G είναι απλό $\Leftrightarrow$ A[i, j] $\leq$ 1 and A[i, i] = 0
- Για κάθε v_i $\Sigma_{\_\{j=1\ldots n\}}\mathbf{A}[i, j] = \delta(v_i)$

Πίνακας πρόσπτωσης



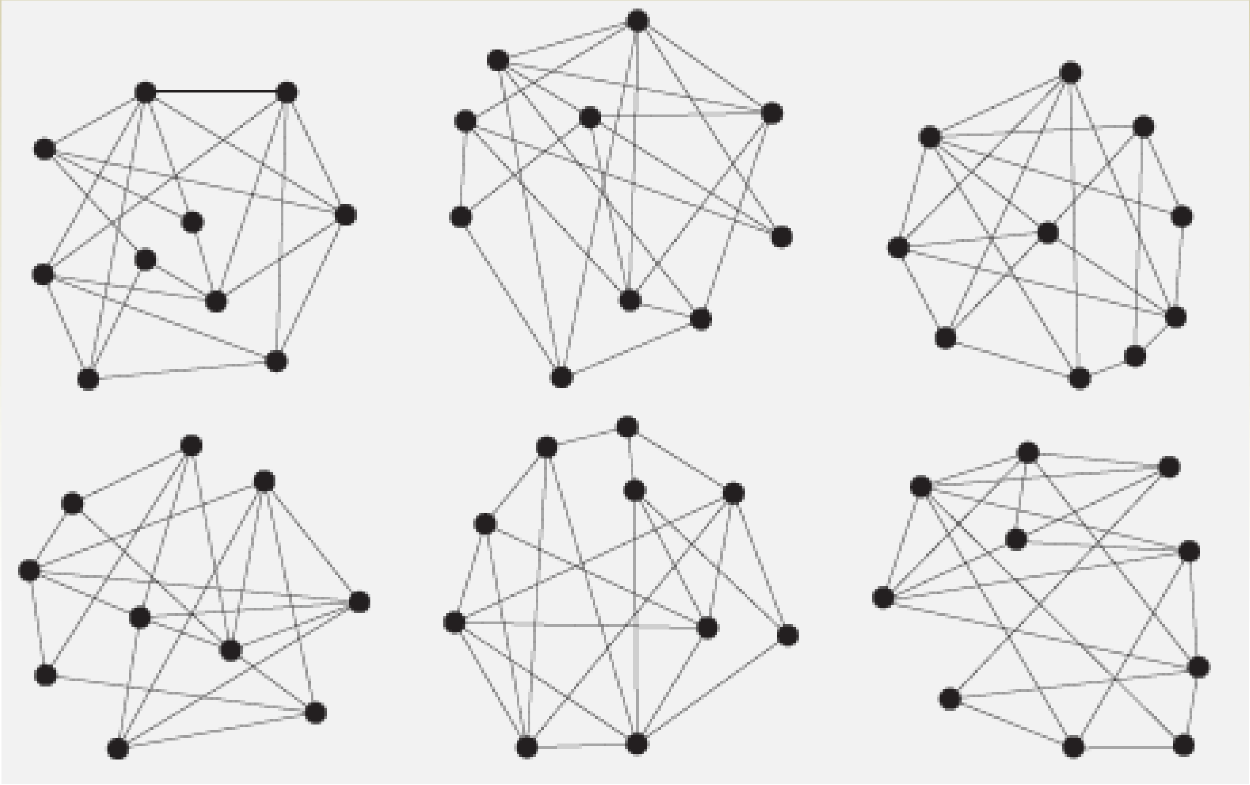
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	2	1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	0	1	1	0
v_3	0	0	1	1	1	1	0
v_4	0	0	0	1	0	0	2

Παρατηρήσεις.

- Το G είναι απλό μόνο εάν $M[i, j] \leq 1$
- Για κάθε v_i: $\Sigma_{\{j=1\ldots m\}}$ $\mathbf{M}[i, j] = \delta(v_i)$
- Για κάθε e_j: $\Sigma_{\{i=1\ldots n\}}\mathbf{M}[i, j] = 2$

Ισομορφισμός γραφημάτων

- Τα G_1 και G_2 είναι ισομορφικά εάν υπάρχει κάποια ένα-προς-ένα απεικόνιση $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ τέτοια ώστε για κάθε ακμή $e_1 \in E_1$ με $e_1 = \langle v,u \rangle$ υπάρχει μια μοναδική ακμή $e_2 \in E_2$ με $e_2 = \langle \varphi(v),\varphi(u) \rangle$



Συνδεσμικότητα: Ορισμοί

- Ένας *(v_0,v_k)-walk* (περίπατος) είναι μια ακολουθία [v_0,e_1,v_1,e_2, . . . ,v_{k-1},e_k ,v_k] με $e_i = <v_{i-1},v_i>$. Ένα *trail* είναι ένας περίπατος με διακριτές ακμές; ένα *path (μονοπάτι)* με διακριτές κορυφές. Ένας *cycle (κύκλος)* είναι ένα trail με διακριτές κορυφές εκτός από $v_0 = v_k$
- Οι κορυφές u != v του G είναι συνδεδεμένες, εάν υπάρχει ένα (u,v)−μονοπάτι στο G. Το G είναι συνδεδεμένο εάν όλα τα ζεύγη διακριτών κορυφών είναι συνδεδεμένα
- $H \subseteq G$ είναι *συνιστώσα* του G εάν το H είναι συνδεδεμένο και δεν περιέχεται σε ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του G με περισσότερες κορυφές ή ακμές. Ο αριθμός των συνιστωσών του G συμβολίζεται με ω(G)

Συνδεσμικότητα και ευρωστία

- Η συνδεσμικότητα δείχνει εάν όλοι οι κόμβοι σε ένα δίκτυο είναι προσβάσιμοι από οποιονδήποτε άλλο κόμβο

- **Παράδειγμα.**

  Τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, όπως το Διαδίκτυο, απαιτούνται να είναι συνδεδεμένα, και έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να παραμένουν συνδεδεμένα, ακόμα και όταν υφίστανται επιθέσεις

- For a graph G έστω $V^* \subset V(G)$ and $E^* \subset E(G)$. Εάν $\omega(G-V^*) > \omega(G)$ τότε το V^* λέγεται *vertex cut*. Εάν $\omega(G-E^*) > \omega(G)$ τότε το E^* λέγεται *edge cut*

Ελάχιστες τομές (minimal cuts)

- Για λόγους ευρωστίας, μας ενδιαφέρει να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό κορυφών ή ακμών που πρέπει ν' αφαιρέσουμε για να διαμερίσουμε ένα γράφημα

- **Συμβολισμοί.**

  κG) είναι το μέγεθος ενός ελάχιστου vertex cut του G

  λ(G) είναι το μέγεθος ενός ελάχιστου edge cut

- **ΘΕΩΡΗΜΑ.**

  $\kappa(G) \le \lambda(G) \le min_{\{v \in V(G)\}}(\delta(v))$

Το θεώρημα του Menger

- **Ορισμός.**

  Έστω *P*(u,v) είναι μια συλλογή μονοπατιών μεταξύ των κορυφών u και v

  Vertex independent: Για κάθε P,Q ∈ P(u,v):V(P)∩V(Q) ={u,v}

  Edge independent: Για κάθε P,Q ∈ P(u,v):E(P)∩E(Q) =/0.

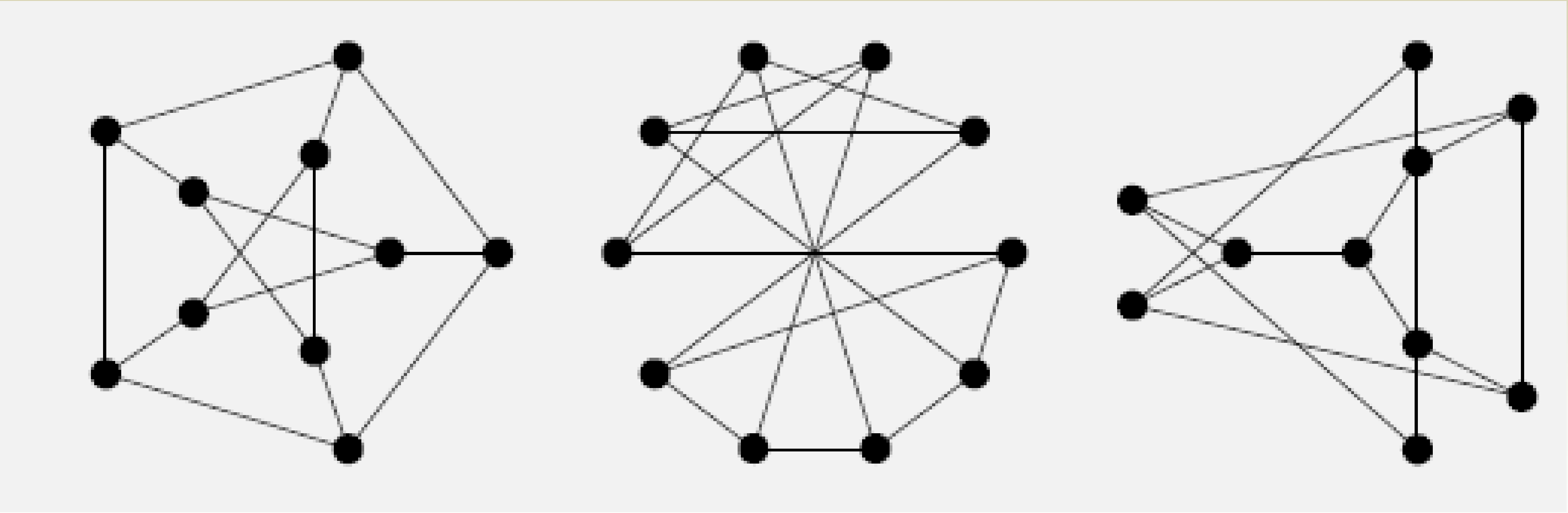
- **ΘΕΩΡΗΜΑ [Menger].**

  Έστω ένα γράφημα *G με δυο μη γειτονικές κορυφές u και υ. Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών σε ένα vertex cut που αποσυνδέει τις u και υ είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό των pairwise vertex-independent paths από u προς υ. Ο ελάχιστος αριθμός ακμών σε ένα edge cut που αποσυνδέει τις u και υ, είναι ίσος με τα μέγιστο αριθμό των pairwise edge-independent paths μεταξύ u και υ*

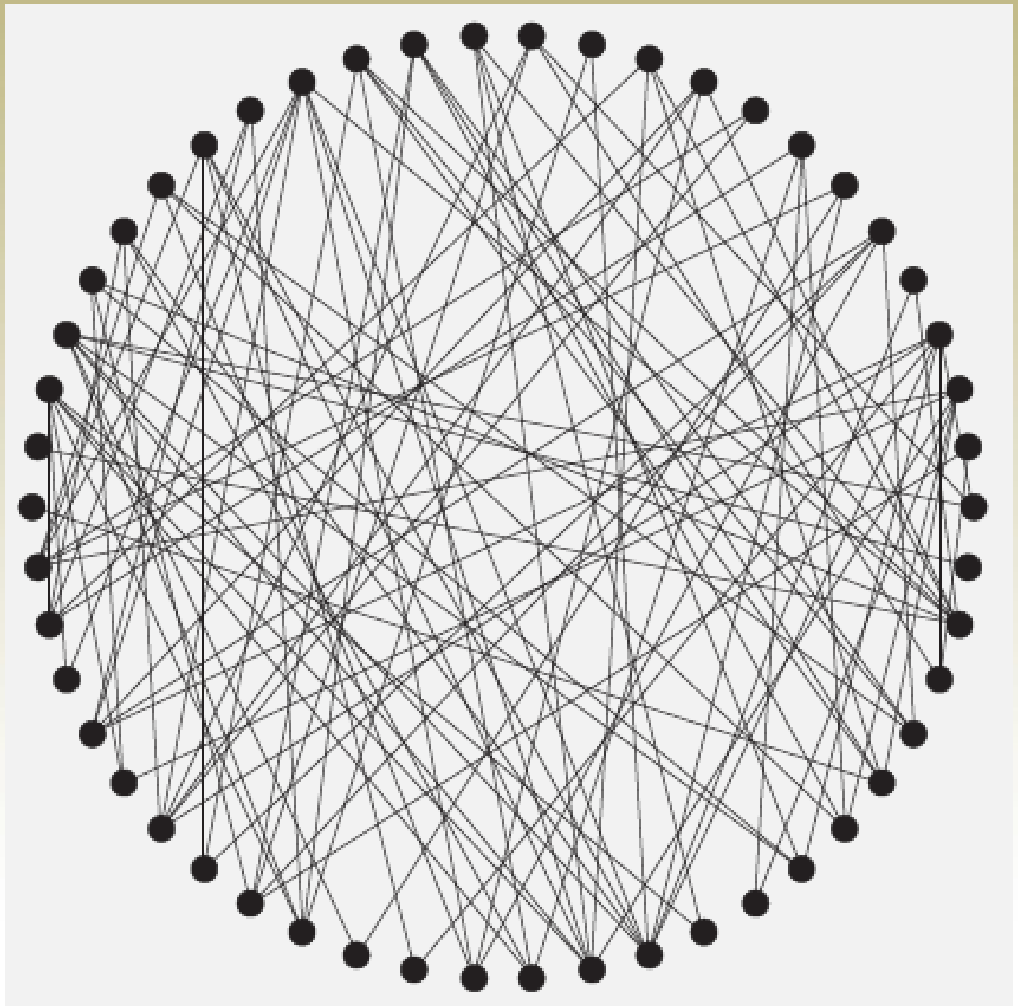
Σχεδίαση γραφημάτων

- **Παρατήρηση.**

  Είναι σημαντικό να δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα γράφημα, δηλαδή, να σκεφτούμε το *graph embedding*



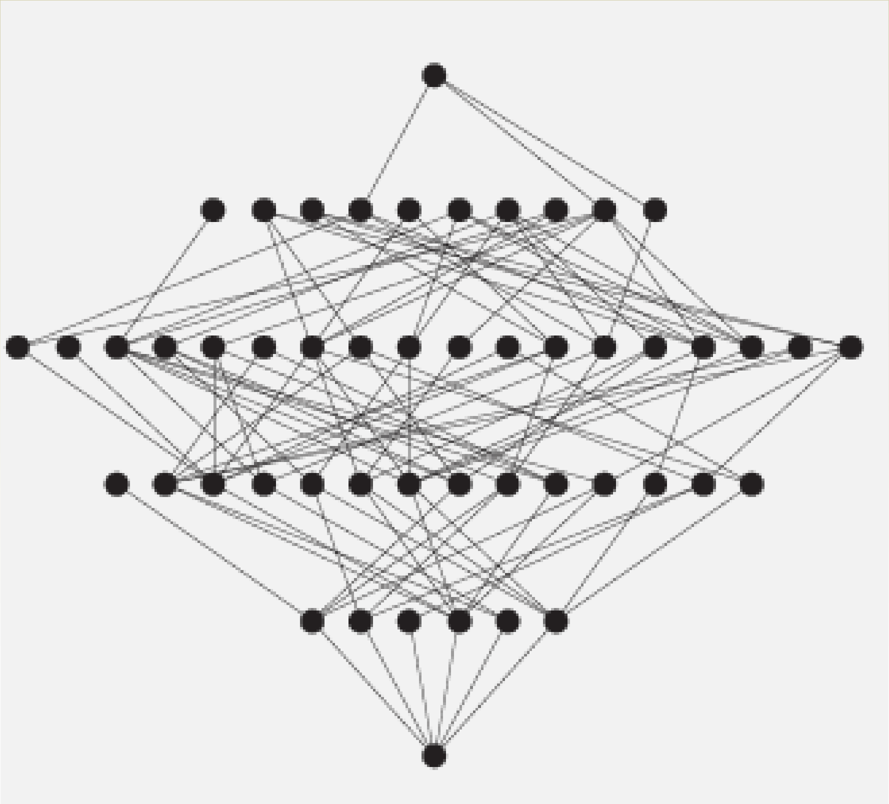
Κυκλική αναπαράσταση



Διαβαθμισμένη (ranked) αναπαράσταση

- **Ορισμός.**

  Το G είναι διμερές *if* $V(G) = V_1 \cup V_2$ *and* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *ώστε* $E(G) \subseteq \{<u_1,u_2> \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$



“Φυσικές πηγές” δικτύων

- Collaboration Graphs

  Collaboration graphs record who works with whom in a specific setting; co-authorships among scientists and co-appearance in movies by actors and actresses are such examples

- Who-talks-to-Whom Graphs

  The Microsoft IM graph is a snapshot of a large community engaged in several billion conversations over the course of a month. In this way, it captures the “who-talks-to-whom” structure of the community. Similar datasets have been constructed from the e-mail logs within a company or a university, as well as from records of phone calls

- Technological Networks

  Interconnections among computers on the Internet or among generating stations in a power grid

“Φυσικές πηγές” δικτύων

- Information Linkage Graphs

  Snapshots of the Web are central examples of network datasets. The field of citation analysis has, since the early part of the 20th century, studied the network structure of citations among scientific papers or patents, as a way of tracking the evolution of science

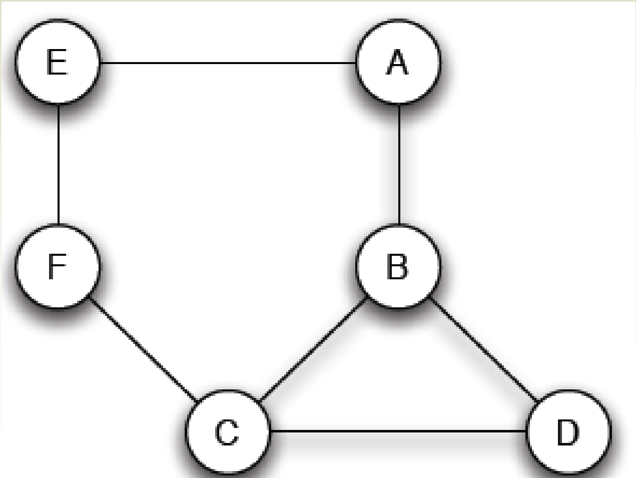
- Networks in the Natural World

  Food webs represent the who-eats-whom relationships among species in an ecosystem (reasoning about issues such as cascading extinctions: if certain species become extinct, then species that rely on them for food risk becoming extinct as well, if they do not have alternative food sources; these extinctions can propagate through the food web as a chain reaction.). The structure of neural connections within an organism's brain

Άσκηση

- Θυμηθείτε ότι a shortest path μεταξύ δύο κόμβων είναι ένα μονοπάτι με ελάχιστο δυνατό μήκος. Θα λέμε ότι ένας κόμβος X είναι *pivotal* για ένα ζεύγος διακριτών κόμβων Y και Z εάν το X βρίσκεται πάνω σε κάθε shortest path μεταξύ Y και Z (και ο X δεν ταυτίζεται ούτε με τον Y ούτε με τον Z)

- Ο κόμβος B είναι pivotal για δυο ζεύγη: το ζεύγος που αποτελείται από τον A και C, και το ζεύγος που αποτελείται από τον A και D. (Παρατηρείστε ότι ο B δεν είναι pivotal για το ζεύγος που αποτελείται από τον D και E, αφού υπάρχουν δυο διαφορετικά shortest paths μεταξύ του D και E, ένα από τα οποία (χρησιμοποιώντας το C και F) δεν περνά διαμέσου του B. Συνεπώς το B δεν βρίσκεται πάνω σε <u>κάθε</u> shortest path μεταξύ του D και του E.) Από την άλλη μεριά, ο κόμβος D δεν είναι pivotal για κανένα ζεύγος



Ασκήσεις

- **Ερώτημα 1.**

  Δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος στο οποίο κάθε κόμβος είναι pivotal για τουλάχιστον ένα ζεύγος κόμβων.

- **Ερώτημα 2.**

  Δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος στο οποίο κάθε κόμβος είναι pivotal για τουλάχιστον δυο διαφορετικά ζεύγη κόμβων.

- **Ερώτημα 3.**

  Δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος, που αποτελείται από τουλάχιστον τέσσερεις κόμβους, στο οποίο υπάρχει ένας single κόμβος X ο οποίος είναι pivotal για κάθε ζεύγος κόμβων (χωρίς να εξετάζουμε τα ζεύγη που περιέχουν τον X).

Άσκηση

- **Ερώτημα 4.**

  Το *line graph* L(G) ενός απλού γραφήματος G είναι εκείνο το γράφημα που οι κόμβοι του είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις ακμές του G. Δυο κόμβοι του L(G) είναι γειτονικοί, εάν και μόνο εάν οι αντίστοιχες ακμές του G “γειτονικές”. Α) Δείξτε ότι τα line graphs των παρακάτω γραφημάτων είναι ισομορφικά. Β) Να βρείτε μια αναλυτική έκφραση για τον αριθμό των ακμών ενός L(G) σε σχέση με τους βαθμούς των κόμβων του G.