<u>Γραφικα Η/Υ</u>

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Χρωματισμός Πολυγώνων

Ανάγνωση: Παραγράφος 2.4 .

Απαιτήσεις:
Παραθέτονται στη συνέχεια δύο θέματα ως αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Α) Χρωματισμός τριγώνου με βάση τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες
(Triangle Rasterization or scan conversion (Drawing on a raster screen))

Πρόβλημα: Να παρασταθεί ένα 2Δ τρίγωνο με 2Δ κορυφές $p_0=(x_0 , y_0)$, $p_1=(x_1 , y_1)$, $p_2=(x_2 , y_2)$ στην πλεγματική οθόνη σε περιβάλλον OpenGL/GLUT. Οι συντεταγμένες των κορυφών μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί και δίνονται από τον προγραμματιστή. Ο χρωματισμός του τριγώνου να γίνει με την μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής από τις χρωματικές τιμές των κορυφών του τριγώνου. Με βάση τα ισχύοντα για ένα τρίγωνο, που δίνονται στη συνέχεια, να αποδειχθούν οι παρακάτω ισχυρισμοί και να χρησιμοποιηθεί για το χρωματισμό του τριγώνου ο αλγόριθμος χρωματισμού τριγώνων που παρατίθεται.

Σε ένα τρίγωνο ισχύουν τα εξής:

$$area = \frac{1}{2} det \begin{Bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(x_0x_2 - x_0x_1 + x_0y_1 - x_0y_2 + x_1y_2 - x_2y_1)$$

Βαρυκεντρικές συντεταγμένες:
Κάθε διάνυσμα στο σύστημα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων μπορεί να παρασταθεί ως εξής:
$\vec{p} = \vec{\alpha} + \beta\left(\vec{b} - \vec{\alpha}\right) + \gamma(\vec{c} - \vec{\alpha})$
$\vec{p} = (1 - \beta - \gamma)\vec{\alpha} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$
$\alpha = 1 - \beta - \gamma$
$\vec{p} = \alpha\vec{\alpha} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$
Όπου, $\vec{\alpha} = (x_\alpha, y_\alpha), \vec{b} = (x_b, y_b), \vec{c} = (x_c, y_c)$ τα διανύσματα που ορίζουν τις κορυφές του τριγώνου και a, b, c πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί:
1) *p* είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου αν και μόνον εάν $0 < a < 1$, 0< β<1<, 0 <γ < 1.
2) Τι τιμές παίρνουν οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες αν *p* βρίσκεται στην κορυφή ή πλευρά του τριγώνου;
3) Πως μπορούν να υπολογισθούν οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες;

α) Γεωμετρικά

$\alpha = \frac{A_{\vec{\alpha}}}{A}, \beta = \frac{A_{\vec{b}}}{A}, \gamma = \frac{A_{\vec{c}}}{A}$ όπου A είναι το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τελικά σημεία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$ και $A_{\vec{\alpha}}$, $A_{\vec{b}}$ και $A_{\vec{c}}$ τα εμβαδά των αντίστοιχων υποτριγώνων που ορίζονται από τις κορυφές $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{c}$, αν αντικαταστήσουμε την κορυφή-δείκτηαπό το τελικό σημείο του $\vec{p}$.

Β) Αλγεβρικά

$$\gamma = \frac{(y_\alpha - y_b)x + (x_b - x_\alpha)y + (x_\alpha y_b - x_b y_\alpha)}{(y_\alpha - y_b)x_c + (x_b - x_\alpha)y_c + (x_\alpha y_b - x_b y_\alpha)}$$

$$\beta = \frac{(y_\alpha - y_c)x + (x_c - x_\alpha)y + (x_\alpha y_c - x_c y_\alpha)}{(y_\alpha - y_c)x_b + (x_c - x_\alpha)y_b + (x_\alpha y_c - x_c y_\alpha)}$$

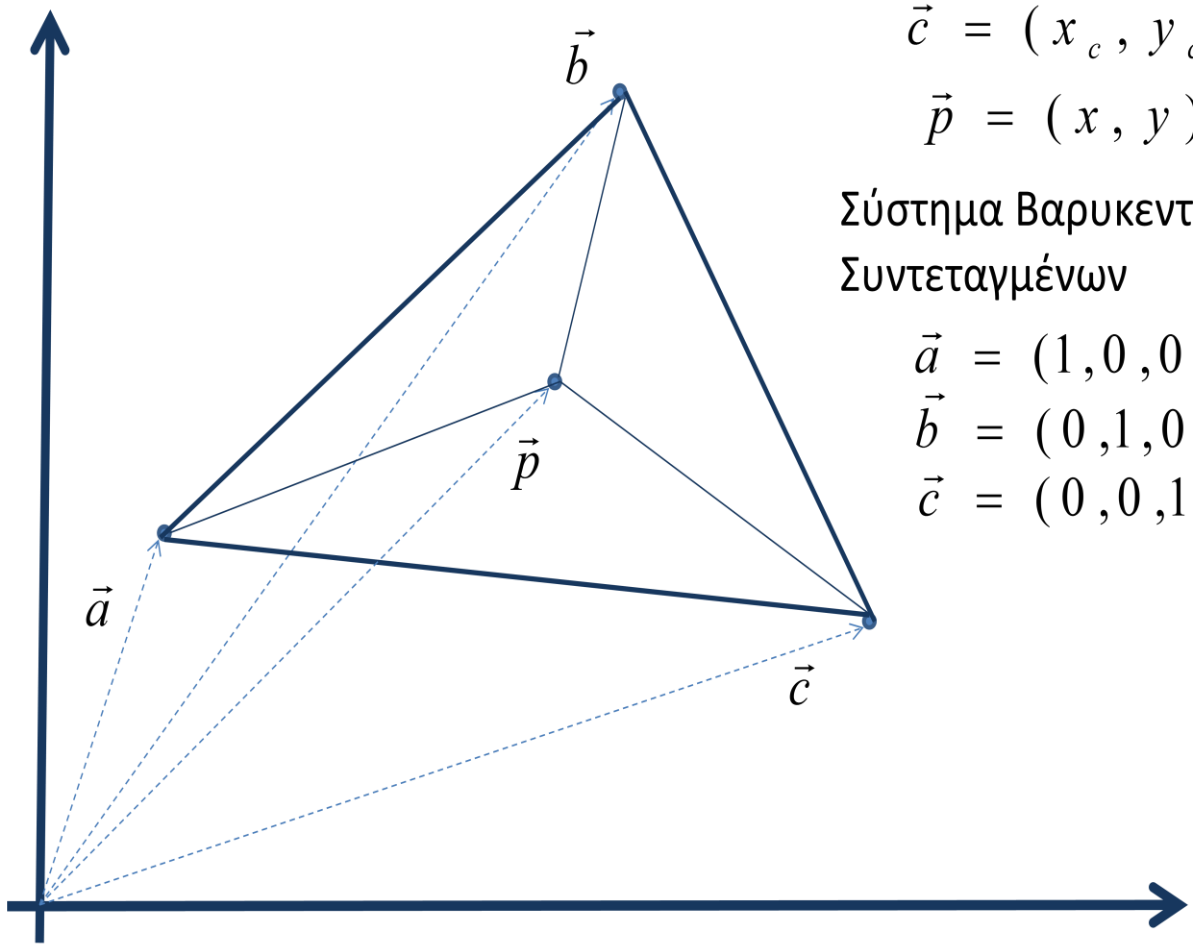
$$\alpha = 1 - \beta - \gamma$$

Σύστημα Καρτεσιανών Συντεταγμένων

$$\vec{a} = (x_a, y_a)$$
$$\vec{b} = (x_b, y_b)$$
$$\vec{c} = (x_c, y_c)$$
$$\vec{p} = (x, y)$$

Σύστημα Βαρυκεντρικών Συντεταγμένων

$$\vec{a} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{b} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{c} = (0, 0, 1)$$



Algorithm

x_{min} = $floor(x_i)$
x_{max} = $ceiling(x_i)$
y_{min} = $floor(y_i)$
y_{max} = $ceiling(y_i)$
for all $y = y_{min}$ to y_{max} do
for all $x = x_{min}$ to x_{max} do
    $\alpha = f_{12}(x, y) / f_{12}(x_0, y_0)$
    $\beta = f_{20}(x, y) / f_{20}(x_1, y_1)$
    $y = f_{01}(x, y) / f_{01}(x_2, y_2)$
    if ($\alpha > 0$ and $\beta > 0$ and $\gamma > 0$) then

$c = ac_0 + \beta c_1 + \gamma c_2$
drawpixel _x, y_ with color c

όπου
$f_{01}(x, y) = (y_0 - y1)x + (x_1 - x_0)y + x_0y_1 - x_1y_0$
$f_{12}(x, y) = (y_1 - y2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1$
$f_{20}(x, y) = (y_2 - y_0)x + (x_0 - x_2)y + x_2y_0 - x_0y_2$

και c_0, c_1 και c_2 τα τρία βασικά χρώματα (κόκκινο, πράσινο, μπλέ).

Παρατηρήσεις

1) Είναι ***(α > 0 and β > 0 and γ > 0)*** ισοδύναμη λογική έκφραση της ***(α Є [0, 1] and β Є [0, 1] and γ Є [0, 1])***;
2) Χρειάζεται να υπολογίσουμε δύο από τις τρεις βαρυκεντρικές συντεταγμένες και να υπολογίσουμε την τρίτη από την σχέση ***α +β+γ= 1***
3) Ο υπολογισμός της $f(x, y)$ μπορεί να γίνει από την συνάφεια των γειτονικών γραμμών σάρωσης $f(x+1, y)= f(x, y) + A$. Το ίδιο ισχύει και τις τιμές $f(x, y+1)$.
4) Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες αλλάζουν κατά μια σταθερά μεταξύ διαδοχικών γραμμών. Το ίδιο ισχύει και για τα χρώματα c !
5) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου δίδεται και από το τύπο $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} c_i$
όπου
$C_0 = x_0y_1 - x_1y_0$
$C_1 = x_1y_2 - x_2y_1$
$C_2 = x_2y_0 - x_0y_2$
Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο αυτό για να προσδιορίσουμε την φορά με την οποία ορίζουμε τις κορυφές του τριγώνου;

Β) Σάρωση πολυγώνων με τον αλγόριθμο YX (σχετικό pdf στα αρχεία της εργασίας – παράγραφος 4.10 του βιβλίου).

Να υλοποιηθεί ο YX αλγόριθμος για την σάρωση ενός πολυγώνου σε περιβάλλον OpenGL/GLUT.

Η αλληλεπίδραση του χρήστη με το γραφικό παράθυρο θα γίνεται με μενού πατώντας το δεξί πλήκτρο. Πρέπει να περιέχονται οι επιλογές:
α) Σχεδίαση του πολυγώνου (με μέγιστο αριθμό κορυφών δέκα),
β) Χρωματισμός του πολυγώνου,
γ) Καθαρισμός του παραθύρου σχεδίασης.