Θεωρία Υπολογισμού

Επεκτάσεις της Μηχανής Turing

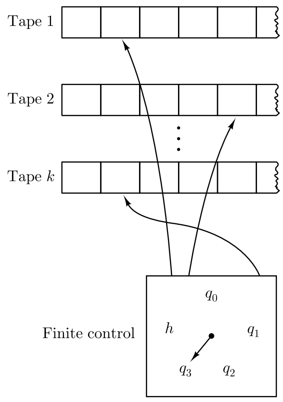
2003-04

Επεκτάσεις της Μηχανής Turing

- Πολλαπλές ταινίες.
- Ταινία άπειρη και προς τις δυο κατευθύνσεις.
- Πολλαπλές κεφαλές.
- Πολυδιάστατη ταινία.
- Μνήμη τυχαίας προσπέλασης.
- Μη ντετερμινισμός.
- Συνδυασμοί των παραπάνω επεκτάσεων.

Οι παραπάνω επεκτάσεις της μηχανής Turing δεν αλλάζουν την υπολογιστική της δύναμη (δηλ. την κλάση των γλωσσών που μπορούν να αποφασιστούν ή των συναρτήσεων που μπορούν να υπολογιστούν από μια **πρότυπη** μηχανή Turing).

Μηχανές Turing με Πολλαπλές Ταινίες



Μηχανές Turing με Πολλαπλές Ταινίες

- **Ορισμός.** Έστω ακέραιος $k \geq 1$. Μια **μηχανή Turing με k ταινίες** είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, H)$ όπου K, Σ, s και H είναι όπως στον ορισμό της πρότυπης μηχανής Turing, και δ, η συνάρτηση μετάβασης, είναι μια συνάρτηση από το $(K \setminus H) \times \Sigma^k$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})^k$.
- Για την δ ισχύουν οι ανάλογοι περιορισμοί που ισχύουν και στην περίπτωση της πρότυπης μηχανής Turing.
- **Παράδειγμα:** Αν $k = 3, K = \{s, q, h\}, \Sigma = \{a, b, c, \sqcup, \triangleright\}$ τότε μπορούμε να έχουμε
$$\delta(s, (a, b, c)) = (q, (\sqcup, b, \rightarrow))$$

Configurations

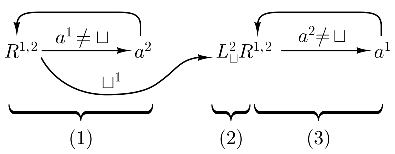
- **Ορισμός.** Μια **συνολική κατάσταση (configuration)** μιας μηχανής Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ με k ταινίες είναι ένα στοιχείο του συνόλου
$$K \times (\triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma \setminus \{\sqcup\}) \cup \{e\}))^k.$$
- **Παράδειγμα:**
$$(q, ((\triangleright ba, aba), (\triangleright acb, cc), (\triangleright cc, a)))$$
- Εναλλακτικά η παραπάνω configuration μπορεί να γραφεί σαν
$$(q, (\triangleright b\underline{a}aba, \triangleright ac\underline{b}cc, \triangleright c\underline{c}a))$$
όπου η υπογράμμιση δείχνει ποιό σύμβολο σαρώνει η κάθε κεφαλή.

Υπολογισμοί με Μηχανές Turing

- Μια μηχανή Turing με k ταινίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφασίσει ή να ημιαποφασίσει μια γλώσσα, ή για να υπολογίσει μια συνάρτηση. Οι σχετικοί ορισμοί είναι προφανείς.
- **Σύμβαση:** Η συμβολοσειρά εισόδου τοποθετείται στην πρώτη ταινία με τον ίδιο τρόπο που θα παρουσιαζόταν σε μια καθιερωμένη μηχανή Turing. Οι άλλες ταινίες είναι αρχικά κενές, με την κεφαλή στο πιο αριστερό κενό τετράγωνο. Στο τέλος ενός υπολογισμού, μια μηχανή Turing με k ταινίες αφήνει την έξοδο της στην πρώτη ταινία (τα περιεχόμενα των άλλων ταινιών αγνοούνται).

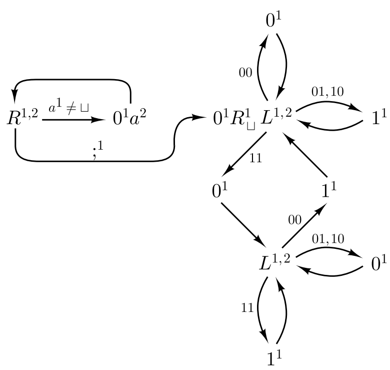
Γραφική Περιγραφή: Παράδειγμα

- Η παρακάτω μηχανή είναι μια μηχανή αντιγραφής με δύο ταινίες: μετατρέπει την πρώτη ταινία από $\triangleright\underline{\sqcup}w\sqcup$ σε $\triangleright \sqcup w \sqcup w\underline{\sqcup}$.



- **Συμβολισμός:** Οι εκθέτες δείχνουν την ταινία στην οποία εργαζόμαστε.

Παράδειγμα: Πρόσθεση Δυαδικών Αριθμών



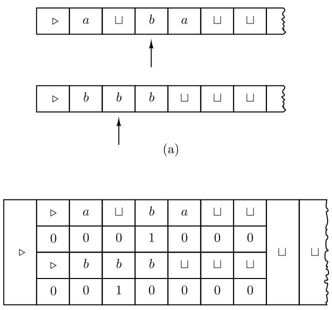
Ισοδυναμία

- **Θεώρημα:** Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια μηχανή Turing με k ταινίες ($k \geq 1$). Τότε υπάρχει μια πρότυπη μηχανή Turing $M' = (K', \Sigma', \delta', s', H)$ ώστε:
  - $\Sigma \subseteq \Sigma'$
  - Για κάθε συμβολοσειρά εισόδου $x \in \Sigma^*$, η M με είσοδο x τερματίζει με έξοδο y στην πρώτη ταινία αν και μόνο αν η M' με είσοδο x τερματίζει στην ίδια κατάσταση και με την ίδια έξοδο y.
  - Αν η M με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα, τότε η M' τερματίζει με είσοδο x μετά από $O(t(|x| + t))$ βήματα.

Απόδειξη

- Η ταινία της M' πρέπει να περιέχει όλη την πληροφορία των ταινιών της M. Ένα απλός τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να θεωρήσουμε την ταινία της M χωρισμένη σε $2k$ **ζώνες**.
- Η πρώτη, τρίτη, ..., $(2k-1)$-οστή ζώνη της ταινίας της μηχανής M' αντιστοιχεί στην πρώτη, δεύτερη, ..., k-οστή ταινία της μηχανής M. Η δεύτερη, τέταρτη, ..., $2k$-οστή ζώνη της ταινίας της μηχανής M' μας δείχνει τη θέση της κεφαλής της πρώτης, δεύτερης, ..., k-οστής ταινίας της μηχανής M.

Απόδειξη



(a)

(b)

Απόδειξη

- Τυπικά ο χωρισμός της ταινίας σε ζώνες επιτυγχάνεται ορίζοντας $\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma \times \{0,1\})^k$.
- Με τον παραπάνω ορισμό η M' μπορεί να δέχεται την ίδια είσοδο και να δίνει την ίδια έξοδο με την M (αυτός είναι ο ρόλος του Σ). Επίσης μπορεί να προσομοιώνει τη λειτουργία της M (αυτός είναι ο ρόλος του $(\Sigma \times \{0,1\})^k$).

Απόδειξη

Με είσοδο $w \in \Sigma^*$, η μηχανή M' δουλεύει ως εξής.

- **Φάση 1:**
  - Μετατόπισε την συμβολοσειρά εισόδου ένα τετράγωνο πρός τα δεξιά.
  - Επέστρεψε στο τετράγωνο αμέσως δεξιά από το $\triangleright$, και γράψε το σύμβολο $(\triangleright, 0, \triangleright, 0, \ldots, \triangleright, 0)$.
  - Προχώρησε ένα τετράγωνο προς τα δεξιά και γράψε το σύμβολο $(\sqcup, 1, \sqcup, 1, \ldots, \sqcup, 1)$.
  - Προχώρα προς τα δεξιά. Σε κάθε τετράγωνο, αν το σύμβολο που διαβάζεις είναι $a \neq \sqcup$, αντικατέστησε το με $(a, 0, \sqcup, 0, \ldots, \sqcup, 0)$. Αν διαβάσεις $a = \sqcup$ τότε εδώ τελείωνει η πρώτη φάση.

Απόδειξη

- **Φάση 2:** Προσομοίωσε τή λειτουργία της M. Δηλ. επανέλαβε τα δύο παρακάτω βήματα μέχρι η M να τερματίσει (αν τερματίζει).
  - Σάρωσε την ταινία προς τ' αριστερά και βρές ποιά είναι τα σύμβολα που διαβάζουν οι k κεφαλές της M. Μετά επέστρεψε στο δεξιότερο κενό τετράγωνο της ταινίας. Σ' αυτό το σημείο η κατάσταση της M' κωδικοποιεί ποιά σύμβολα διαβάζουν οι k κεφαλές της M.
  - Σάρωσε την ταινία προς τ' αριστερά και μετά προς τα δεξιά και ενημέρωσε τις ζώνες ανάλογα με τις κινήσεις της M. Στο τέλος επέστρεψε στο δεξιότερο κενό τετράγωνο της ταινίας.

Απόδειξη

- **Φάση 3:** Όταν η M τερματίσει, κάνε τα ακόλουθα:
  - Μετέτρεψε την ταινία στην αρχική της μορφή (χωρίς ζώνες) αγνοώντας τα περιεχόμενα όλων των ζωνών εκτός από την πρώτη.
  - Μετακίνησε την κεφαλή στη θέση που θα βρισκόταν η πρώτη κεφαλή της M.
  - Τερματισε στην ίδια κατάσταση που θα τερμάτιζε και η M.

Απόδειξη

Υπολογιστική πολυπλοκότητα:

- Η φάση 1 της προσομοίωσης χρειάζεται $O(|x|)$ βήματα όπου x είναι η είσοδος της M.
- Σε κάθε βήμα της φάσης 2 που αντιστοιχεί σε ένα βήμα της M, η M' σαρώνει 2 φορές το μη κενό τμήμα της ταινίας της. Μετά από t βήματα της M, το μη κενό τμήμα της ταινία της M' έχει μήκος το πολύ $|x| + 2 + t$ (αρχικά έχει μήκος $|x| + 2$, και σε κάθε βήμα της M μπορεί να μεγαλώσει το πολύ κατά 1 τετράγωνο).
- Αρα οι φάσεις 2 και 3 χρειάζονται $O(t(|x| + t))$ βήματα.
- Τελικά λοιπόν, αν η M με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα, τότε η M' με είσοδο x τερματίζει μετά από $O(t(|x| + t))$ βήματα.

Ισοδυναμία

- **Πόρισμα:** Κάθε συνάρτηση που υπολογίζεται (ή γλώσσα που αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται) από μια μηχανή Turing με $k \geq 1$ ταινίες, επίσης υπολογίζεται (ή αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται) από μια πρότυπη μηχανή Turing.

Ταινία Απειρη και Προς τις Δυο Κατευθύνσεις

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μηχανή Turing M με ταινία άπειρη και προς τις δυο κατευθύνσεις. Αρχικά όλα τα τετράγωνα είναι κενά εκτός αυτά που περιέχουν την είσοδο (δεν υπάρχει σύμβολο $\triangleright$), και η κεφαλή βρίσκεται στο πρώτο κενό τετράγωνο αριστερά της εισόδου.
- Η M μπορεί εύκολα να προσομοιωθεί από μια μηχανή Turing M' με **δύο ταινίες που είναι άπειρες μόνο πρός τα δεξιά**. Αρα η M μπορεί να προσομοιωθεί και από μια πρότυπη μηχανή Turing M''.
- Αν η M με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα, τότε η M' τερματίζει με είσοδο x μετά από αριθμό βημάτων γραμμικό ως πρός t και $|x|$.

Μηχανές Turing με Πολλαπλές Κεφαλές

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μηχανή Turing M που έχει μια μόνο ταινία αλλά $k \geq 1$ κεφαλές που σε κάθε βήμα μπορούν να κινούνται ή να γράφουν ανεξάρτητα η μια από την άλλη.
- Η M μπορεί να προσομοιωθεί από μια πρότυπη μηχανή Turing M' της οποίας η ταινία αποτελείται από $k+1$ ζώνες. Η πρώτη ζώνη προσομοιώνει την αρχική ταινία και οι υπόλοιπες k ζώνες χρησιμοποιούνται για να δείχνουν τις θέσεις των κεφαλών.
- Αν η M με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα, τότε η M' τερματίζει με είσοδο x μετά από αριθμό βημάτων τετραγωνικό ως πρός t και $|x|$.

Μηχανές Turing με Πολυδιάστατη Ταινία

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μηχανή Turing που η ταινία της είναι ένα άπειρο διδιάστατο (ή πολυδιάστατο) πλέγμα.
- Η M μπορεί να προσομοιωθεί από μια πρότυπη μηχανή Turing M'. (Με ποιό τρόπο;)
- Αν η M με είσοδο x τερματίζει μετά από t βήματα, τότε η M' τερματίζει με είσοδο x μετά από αριθμό βημάτων πολυωνυμικό ως πρός t και $|x|$.

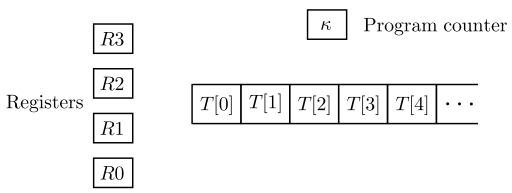
Συνδυασμοί

- Μπορούμε βέβαια να έχουμε μηχανές Turing που συνδυάζουν τις επεκτάσεις που μελετήσαμε:
  - Πολλαπλές ταινίες.
  - Ταινία άπειρη και προς τις δυο κατευθύνσεις.
  - Πολλαπλές κεφαλές.
  - Πολυδιάστατη ταινία.
- Σε όλες τις περιπτώσεις η υπολογιστική δύναμη της μηχανής που προκύπτει είναι η ίδια με την υπολογιστική δύναμη της πρότυπης μηχανής Turing.

Ισοδυναμία

- **Θεώρημα:** Κάθε συνάρτηση που υπολογίζεται (ή γλώσσα που αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται) από μια μηχανή Turing με πολλαπλές ταινίες, πολλαπλές κεφαλές, ταινίες άπειρες και προς τις δύο κατευθύνσεις ή πολυδιάστατες ταινίες, μπορεί να υπολογιστεί (ή να αποφασιστεί ή ημιαποφασιστεί) από μια πρότυπη μηχανή Turing.

Μηχανές Turing με Μνήμη Τυχαίας Προσπέλασης



Μηχανές Turing με Μνήμη Τυχαίας Προσπέλασης

- Μια **μηχανή Turing με μνήμη τυχαίας προσπέλασης** αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό καταχωρητών, ένα μετρητή προγράμματος και μια ταινία που είναι άπειρη προς τα δεξιά. Κάθε καταχωρητής και κάθε τετράγωνο της ταινίας μπορεί να περιέχει ένα **φυσικό αριθμό**. Ο μετρητής προγράμματος μας δείχνει ποιά είναι η επόμενη εντολή που πρέπει να εκτελεστεί.
- Η μηχανή λειτουργεί όπως προδιαγράφεται από ένα **πρόγραμμα** το οποίο παίζει το ρόλο της συνάρτησης μετάβασης.

Εντολές

Εντολή	Τελεστής	Σημασιολογία
read	j	$R_0 := T[R_j]$
write	j	$T[R_j] := R_0$
store	j	$R_j := R_0$
load	j	$R_0 := R_j$
load	$= c$	$R_0 := c$
add	j	$R_0 := R_0 + R_j$
add	$= c$	$R_0 := R_0 + c$

Εντολές

Εντολή	Τελεστής	Σημασιολογία
sub	j	$R_0 := max(R_0 - R_j, 0)$
sub	$= c$	$R_0 := max(R_0 - c, 0)$
half		$R_0 := \lfloor \frac{R_0}{2} \rfloor$
jump	s	$\kappa := s$
jpos	s	if $R_0 > 0$ then $\kappa := s$
jzero	s	if $R_0 = 0$ then $\kappa := s$
halt		$\kappa := 0$

Λειτουργία

- Αρχικά οι τιμές των καταχωρητών είναι 0, η τιμή του μετρητή προγράμματος 1, και τα περιεχόμενα της ταινίας κωδικοποιούν την συμβολοσειρά εισόδου (χρησιμοποιώντας μια 1-1 και επί απεικόνιση από το αλφάβητο Σ στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, |\Sigma| - 1\}$).
- Ο καταχωρητής R_0 είναι ο accumulator όπου γίνονται όλες οι αριθμητικές και λογικές πράξεις.
- Η μηχανή σταματάει όταν εκτελεστεί η εντολή halt.

Ισοδυναμία

- **Θεώρημα:** Κάθε συνάρτηση που υπολογίζεται (ή γλώσσα που αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται) από μια μηχανή Turing με μνήμη τυχαίας προσπέλασης, μπορεί να υπολογιστεί (ή να αποφασιστεί ή να ημιαποφασιστεί) από μια πρότυπη μηχανή Turing.
- Σε περίπτωση τερματισμού, ο αριθμός των βημάτων που κάνει η πρότυπη μηχανή Turing είναι φραγμένος από ένα πολυώνυμο ως προς τον αριθμό των βημάτων της μηχανής Turing με μνήμη τυχαίας προσπέλασης.

Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- **Ορισμός.** Μια **μη ντετερμινιστική μηχανή Turing** είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \Delta, s, H)$ όπου
  - K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**.
  - Σ είναι ένα **αλφάβητο**, το οποίο περιέχει το **κενό σύμβολο** $\sqcup$ και το **σύμβολο του αριστερού άκρου της ταινίας** $\triangleright$, αλλά δεν περιέχει τα σύμβολα $\rightarrow$ και $\leftarrow$.
  - $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**.
  - $H \subseteq K$ είναι το **σύνολο των καταστάσεων τερματισμού.**
  - Δ, **η σχέση μετάβασης**, είναι ένα υποσύνολο του συνόλου
$$((K \setminus H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}))$$
- Ισχύουν οι συνηθισμένοι περιορισμοί σχετικά με την Δ και το σύμβολο $\triangleright$.

Ημιαποφασισιμότητα

- Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing. Η μηχανή M **ημιαποφασίζει** τη γλώσσα $L \subseteq (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ η ακόλουθη πρόταση ισχύει: $w \in L$ αν και μόνο αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, u\underline{a}v)$ για κάποια κατάσταση τερματισμού $h \in H$, $a \in \Sigma$ και $u, v \in \Sigma^*$.
- Δηλ. $w \in L$ αν και μόνο αν η M με είσοδο w έχει ένα υπολογισμό που τερματίζει.

Αποφασισιμότητα

- Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \{y, n\})$ μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing.
- Η M **αποφασίζει** την γλώσσα $L \subseteq (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ αν για όλες τις συμβολοσειρές $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:
  - Υπάρχει φυσικός αριθμός N, που εξαρτάται από τις M και w, ώστε δεν υπάρχει configuration C τέτοια ώστε $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^N C$.
  - $w \in L$ αν και μόνο αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (y, u\underline{a}v)$ για κάποια $u, v \in \Sigma^*$ και $a \in \Sigma$.

Αποφασισιμότητα

- Διαισθητικά οι δύο συνθήκες είναι:
  - Όλοι οι υπολογισμοί της M πρέπει να τερματίζουν.
  - Τουλάχιστον ένας από τους δυνατούς υπολογισμούς της N πρέπει να οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής (y). Μπορεί ομως να υπάρχουν και υπολογισμοί που οδηγούν σε κατάσταση απόρριψης (n) – αυτοί οι υπολογισμοί δεν μας ενδιαφέρουν.
- Ο παραπάνω ορισμός λοιπόν δεν είναι συμμετρικός ως προς τις καταστάσεις y και n.

Υπολογισμός Συνάρτησης

- Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \{h\})$ μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing.
- Η M **υπολογίζει** μια συνάρτηση

$$f: (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^* \to (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$$

αν για όλες τις συμβολοσειρές $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$ ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

  - Υπάρχει φυσικός αριθμός N, που εξαρτάται από τις M και w, ώστε δεν υπάρχει configuration C τέτοια ώστε $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^N C$.
  - $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, u\underline{a}v)$ αν και μόνο αν $ua = \triangleright\sqcup$, και $v = f(w)$.

Υπολογισμός Συνάρτησης

- Διαισθητικά οι δύο συνθήκες είναι:
  - Όλοι οι υπολογισμοί της M πρέπει να τερματίζουν.
  - Όλοι οι υπολογισμοί της M πρέπει να συμφωνούν στο αποτέλεσμα τους (αλλιώς δεν θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε ποιά είναι η σωστή τιμή της συνάρτησης).

Παράδειγμα

- **Ορισμός.** Ένας φυσικός αριθμός λέγεται **σύνθετος** αν είναι ίσος με το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών μεγαλύτερων από 1.
- **Παράδειγμα:** Οι αριθμοί 4, 6, 8, 9, 10 κλπ. είναι σύνθετοι αλλά οι αριθμοί 1, 2, 3, 5, 7 δεν είναι.
- Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing που **ημιαποφασίζει** τη γλώσσα

$$\{w : w \in \{0,1\}^* \text{ και } w \text{ είναι η δυαδική παράσταση ενός σύνθετου αριθμού } \}$$

μπορεί να λειτουργεί ως εξής.

Παράδειγμα

- Με μη ντετερμινιστικό τρόπο διάλεξε δύο δυαδικούς αριθμούς $p, q > 1$ (ψηφίο προς ψηφίο) και γράψε την δυαδική τους παράσταση δίπλα στην συμβολοσειρά εισόδου n.
- Πολλαπλασίασε τους αριθμούς p και q και αντικατέστησε τους πάνω στην ταινία με το γινόμενο τους.
- Αν οι αριθμοί n και $p \cdot q$ είναι ίδιοι τότε τερμάτισε, αλλιώς συνέχισε επ' άπειρον.

Παράδειγμα

- Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing που **αποφασίζει** τη γλώσσα

$$\{w : w \in \{0,1\}^* \text{ και } w \text{ είναι η δυαδική παράσταση ενός σύνθετου αριθμού } \}$$

μπορεί να λειτουργεί ως εξής:

  - Με μη ντετερμινιστικό τρόπο διάλεξε δύο δυαδικούς αριθμούς $p, q > 1$ τέτοιους ώστε ο αριθμός των ψηφίων της δυαδικής τους παράστασης δεν υπερβαίνει τον αριθμό των ψηφίων της συμβολοσειράς εισόδου n. Γράψε την δυαδική παράσταση των p και q δίπλα στην συμβολοσειρά εισόδου.
  - Πολλαπλασίασε τους αριθμούς p και q και αντικατέστησε τους πάνω στην ταινία με το γινόμενο τους.
  - Αν οι αριθμοί n και $p \cdot q$ είναι ίδιοι τότε τερμάτισε στην κατάσταση y, αλλιώς τερμάτισε στην κατάσταση n.

Ισοδυναμία

- **Θεώρημα.** Αν μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M αποφασίζει ή ημιαποφασίζει μια γλώσσα, ή υπολογίζει μια συνάρτηση, τότε υπάρχει μια πρότυπη (ντετερμινιστική) μηχανή Turing M' που αποφασίζει ή ημιαποφασίζει την ίδια γλώσσα, ή υπολογίζει την ίδια συνάρτηση.
- Αν η M τερματίζει μετα από n βήματα, τότε η M' τερματίζει μετά από αριθμό βημάτων **εκθετικό** ως προς τον αριθμό των βημάτων της M.
- **Ερώτηση:** Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την λέξη "εκθετικό" με την λέξη "πολυωνυμικό" στο παραπάνω θεώρημα;
- Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση (θετικη ή αρνητική) θα δώσει λύση σε ένα από τα πιο διάσημα ανοικτά προβλήματα της θεωρίας υπολογισμού.

Απόδειξη (Ημιαποφασισιμότητα)

- Έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing που ημιαποφασίζει μια γλώσσα L. Θα κατασκευάσουμε μια **ντετερμινιστική** μηχανή Turing M' με 3 ταινίες που ημιαποφασίζει την L. Αυτή η μηχανή μπορεί φυσικά να προσομοιωθεί από μια πρότυπη μηχανή Turing.
- Η μηχανή M' θα ψάχνει με συστηματικό τρόπο όλους τους πιθανούς υπολογισμούς της M μέχρι να βρεί ένα που τερματίζει.
- Οι ταινίες της M' έχουν την εξής λειτουργία. Η πρώτη ταινία περιέχει την συμβολοσειρά εισόδου. Η ταινία αυτή δεν αλλάζει ποτέ.
- Η δεύτερη και η τρίτη ταινία χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν τους υπολογισμούς της M. Η συμβολοσειρά εισόδου αντιγράφεται από την πρώτη ταινία στην δεύτερη και μετά η M' προσομοιώνει ένα υπολογισμό της M με ταινία εργασίας τη δεύτερη ταινία.

Απόδειξη (Ημιαποφασισιμότητα)

- Κατά τις διαδοχικές προσομοιώσεις δυνατών υπολογισμών της M, η τρίτη ταινία περιέχει μια συμβολοσειρά από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, r\}^*$ όπου r είναι ο μέγιστος αριθμός βημάτων που είναι δυνατός στην M σε κάθε χρονική στιγμή (λόγω μη ντετερμινισμού).
- Ο αριθμός r μπορεί εύκολα να υπολογιστεί. Για κάθε κατάσταση q της M και κάθε σύμβολο $a \in \Sigma$, ο αριθμός των διαφορετικών τετράδων $(q, a, p, b) \in \Delta$ δεν μπορεί να υπερβαίνει το $r = |K|(|\Sigma| + 2)$.
- Σε κάθε βήμα της προσομοίωσης της M, η M' συμβουλεύεται την τρίτη ταινία για να αποφασίσει ποιό από τα r δυνατά βήματα της M να εκτελέσει.

Απόδειξη (Ημιαποφασισιμότητα)

- Η μηχανή M' λειτουργεί ως εξής:
  - Αντέγραψε της συμβολοσειρά εισόδου από την πρώτη ταινία στη δεύτερη.
  - Αν η συμβολοσειρά της τρίτης ταινίας είναι η w, τότε να παράγεις την συμβολοσειρά του συνόλου $\{1, 2, \ldots, r\}^*$ που είναι λεξικογραφικά επόμενη της w. Έστω ότι αυτή η συμβολοσειρά είναι η $a_1 a_2 \cdots a_k$.
  - Προσομοίωσε τη λειτουργία της M για k βήματα. Σε κάθε βήμα j $(1 \leq j \leq k)$ επέλεξε να εκτελέσεις το a_j δυνατό βήμα της M.
  - Αν σε κάποιο βήμα η M τερματίζει, τότε τερμάτισε.

Απόδειξη (Ημιαποφασισιμότητα)

- Αν η M' τερματίζει, τότε κάποιος υπολογισμός της M τερματίζει επίσης. Αντίστροφα, αν κάποιος υπολογισμός της M τερματίζει μετά από, ας πούμε n, βήματα τότε και η M' τερματίζει μετά από το πολύ $r + r^2 + \cdots + r^n$ βήματα.
- Αρα η M' τερματίζει για κάποια είσοδο αν και μόνο αν ένας υπολογισμός της M τερματίζει με τη ίδια είσοδο.

Ανακεφαλαίωση

- Επεκτάσεις της Μηχανής Turing:
  - Πολλαπλές ταινίες.
  - Ταινία άπειρη και προς τις δυο κατευθύνσεις.
  - Πολλαπλές κεφαλές.
  - Πολυδιάστατη ταινία.
  - Μνήμη τυχαίας προσπέλασης.
  - Μη ντετερμινισμός.
  - Συνδυασμοί των παραπάνω επεκτάσεων.
- Οι παραπάνω επεκτάσεις της μηχανής Turing δεν αλλάζουν την υπολογιστική της δύναμη (δηλ. την κλάση των γλωσσών που μπορούν να αποφασιστούν ή των συναρτήσεων που μπορούν να υπολογιστούν από μια **πρότυπη** μηχανή Turing).

Η θέση των Church-Turing

- Οι μηχανές Turing καθορίζουν με τυπικό τρόπο **τι είναι υπολογισμός.**
- Οι μηχανές Turing που αποφασίζουν γλώσσες ή υπολογίζουν συναρτήσεις (και άρα τερματίζουν πάντα) καθορίζουν με ακρίβεια **τι είναι αλγόριθμος**.
- Η θέση των Church-Turing είναι η ακόλουθη:

  Κάθε αλγόριθμος μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια μηχανή Turing που τερματίζει για κάθε είσοδο. Κάθε μηχανή Turing που τερματίζει για κάθε είσοδο κωδικοποιεί ένα αλγόριθμο.

Μελέτη

- Κεφάλαια 4.3-4.5 από το βιβλίο:
  Harry R. Lewis και Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, 1992.