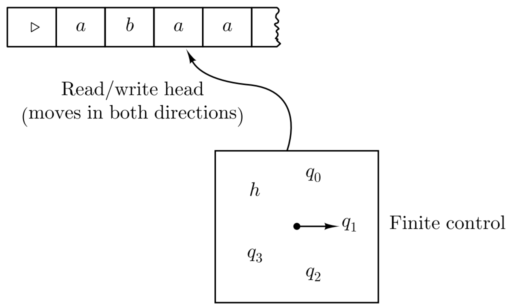
Θεωρία Υπολογισμού

Μηχανές Turing

2003-04

Μηχανές Turing



Μηχανές Turing

- **Ορισμός.** Μια μηχανή Turing είναι μια πεντάδα $(K, \Sigma, \delta, s, H)$ όπου
  - K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**
  - Σ είναι ένα **αλφάβητο** το οποίο περιέχει το **κενό σύμβολο** $\sqcup$ και το **σύμβολο του αριστερού άκρου της ταινίας** $\triangleright$, αλλά δεν περιέχει τα σύμβολα $\rightarrow$ και $\leftarrow$
  - $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**
  - $H \subseteq K$ είναι το **σύνολο των καταστάσεων τερματισμού**
  - δ, **η συνάρτηση μετάβασης**, είναι μια συνάρτηση από το $(K \setminus H) \times \Sigma$ στο $K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$ τέτοια ώστε,
    - για κάθε $q \in K \setminus H$, αν $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$ τότε $b = \rightarrow$
    - για κάθε $q \in K \setminus H$ και $a \in \Sigma$, αν $\delta(q, a) = (p, b)$ τότε $b \neq \triangleright$

Κινήσεις μιας Μηχανής Turing

- Αν $q \in K \setminus H$, $a \in \Sigma$ και $\delta(q, a) = (p, b)$ τότε η M, όταν βρίσκεται στη κατάσταση q και διαβάζει το σύμβολο a στην ταινία, θα περάσει στην κατάσταση p και
  - αν $b \in \Sigma$, τότε σβήνει το a και γράφει το b στη θέση του
  - αν $b = \leftarrow$ ή $b = \rightarrow$ μετακινεί την κεφαλή προς τη κατεύθυνση b.
- Εφόσον η δ είναι συνάρτηση, η λειτουργία της M είναι ντετερμινιστική και θα σταματήσει μόνο όταν η M περάσει σε μια κατάσταση τερματισμού.

Παράδειγμα

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

- όπου

$$K = \{q_0, q_1, h\}, \quad \Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}, \quad s = q_0$$

και η δ δίνεται από τον πίνακα

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	a	(q_0, a)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

- όπου

$$K = \{q_0, h\}, \quad \Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}, \quad s = q_0$$

και η δ δίνεται από τον πίνακα

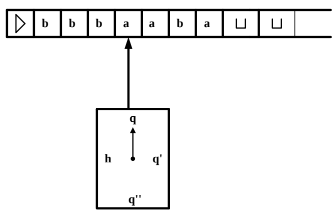
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	$(q_0, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$

Συνολική Κατάσταση

- **Ορισμός.** Μια **συνολική κατάσταση (configuration)** μιας μηχανής Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ είναι ένα στοιχείο του συνόλου

$$K \times \triangleright\Sigma^* \times (\Sigma^*(\Sigma \setminus \{\sqcup\}) \cup \{e\}).$$

Παράδειγμα



Παράδειγμα

- Αυτή η συνολική κατάσταση γράφεται τυπικά σαν $(q, \triangleright bbba, aba)$. Αυτός ο συμβολισμός μας δείχνει ότι
  - Η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q
  - Η συμβολοσειρά αριστερά της κεφαλής είναι η $\triangleright bbba$
  - Η κεφαλή διαβάζει το σύμβολο a
  - Η συμβολοσειρά δεξιά της κεφαλής είναι η aba
- Εναλλακτικά η παραπάνω συνολική κατάσταση μπορεί να γραφεί σαν $(q, \triangleright bbb\underline{a}aba)$ όπου η υπογράμμιση δείχνει ποιό σύμβολο σαρώνει η κεφαλή (αυτός ο συμβολισμός είναι ο πιο συνηθισμένος).

Η Σχέση "παράγει σε ένα βήμα"

- **Ορισμός.** Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια μηχανή Turing και θεωρήστε δύο συνολικές καταστάσεις $(q_1, w_1\underline{a_1}u_1)$ και $(q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$ της M. Τότε

$$(q_1, w_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M (q_2, w_2\underline{a_2}u_2)$$

αν και μόνο αν, για κάποιο $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$, $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ και είτε
  - $b \in \Sigma$, $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$ και $a_2 = b$, ή
  - $b = \leftarrow$, $w_1 = w_2a_2$ και είτε
    - $u_2 = a_1u_1$, αν $a_1 \neq \sqcup$ ή $u_1 \neq e$, ή
    - $u_2 = e$, αν $a_1 = \sqcup$ και $u_1 = e$, ή
  - $b = \rightarrow$, $w_2 = w_1a_1$, και είτε
    - $u_1 = a_2u_2$, ή
    - $u_1 = u_2 = e$ και $a_2 = \sqcup$

Παραγωγές και Υπολογισμοί

- **Ορισμός.** Έστω μηχανή Turing M και $\vdash_M^*$ η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της $\vdash_M$. Λέμε ότι η συνολική κατάσταση C_1 **παράγει** την συνολική κατάσταση C_2 αν $C_1 \vdash_M^* C_2$.
- **Ορισμός.** Ένας **υπολογισμός** της M είναι μια ακολουθία από συνολικές καταστάσεις $C_0, C_1, \ldots, C_n$ για κάποιο $n \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n$$

Λέμε ότι ο υπολογισμός έχει **μήκος** n ή ότι έχει n **βήματα** και γράφουμε $C_0 \vdash_M^n C_n$.

Παράδειγμα

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

- όπου

$$K = \{q_0, q_1, h\}, \quad \Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}, \quad s = q_0$$

και η δ δίνεται από τον πίνακα

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_1, \sqcup)$
q_0	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	a	(q_0, a)
q_1	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

Παράδειγμα

- Ας παρακολουθήσουμε ένα υπολογισμό της M:

$$\begin{aligned}
(q_1, \triangleright\underline{\sqcup}aaaa) &\vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\underline{a}aaa)\\
&\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\underline{\sqcup}aaa)\\
&\vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{a}aa)\\
&\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}aa)\\
&\vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{a}a)\\
&\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup}a)\\
&\vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{a})\\
&\vdash_M (q_1, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})\\
&\vdash_M (q_0, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})\\
&\vdash_M (h, \triangleright\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\underline{\sqcup})
\end{aligned}$$

Αυτός ο υπολογισμός έχει δέκα βήματα.

Γραφική Περιγραφή Μηχανών Turing

- Επειδή είναι πολύ κουραστικό να παρουσιάζουμε μηχανές Turing με τον συμβολισμό που έχουμε ορίσει θα αναπτύξουμε τώρα ένα γραφικό συμβολισμό.
- Αρχικά ορίζουμε τις ακόλουθες **βασικές μηχανές: μηχανές εγγραφής συμβόλου** και **μηχανές μετακίνησης της κεφαλής**.
- Αν Σ είναι το αλφάβητο μας τότε για κάθε $a \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} \setminus \{\triangleright\}$ ορίζουμε μια βασική μηχανή Turing

$$M_a = (\{s, h\}, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

όπου για κάθε $b \in \Sigma \setminus \{\triangleright\}$, $\delta(s, b) = (h, a)$.

Γραφική Περιγραφή Μηχανών Turing

- Επειδή οι βασικές μηχανές χρησιμοποιούνται πολύ συχνά θα έχουμε γι αυτές τις ακόλουθες συντομογραφίες:
  - a (όπου $a \in \Sigma$): Η μηχανή αυτή γράφει το σύμβολο a στην ταινία.
  - L: Η μηχανή αυτή μετακινεί την κεφαλή μια θέση προς τ' αριστερά.
  - R: Η μηχανή αυτή μετακινεί την κεφαλή μια θέση προς τα δεξιά.
- Για να κατασκευάσουμε πιο πολύπλοκες μηχανές Turing θα συνδυάσουμε τις παραπάνω βασικές μηχανές.

Συνδυασμοί Μηχανών Turing

$$\begin{tikzcd}
> M_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & M_2 \\
M_3 &
\end{tikzcd}$$

- Αν M_1, M_2 και M_3 είναι μηχανές Turing, τότε η παραπάνω μηχανή M λειτουργεί ως εξής. Ξεκινά στην αρχική κατάσταση της M_1 και συνεχίζει μιμούμενη την M_1 μέχρι αυτή να τερματίσει. Μετά μιμείται τη λειτουργία είτε της M_2 είτε της M_3, ανάλογα με το αν το σύμβολο που σαρώνεται εκείνη τη στιγμή είναι το a ή το b.

Συνδυασμοί Μηχανών Turing

- **Ακριβής ορισμός:** Έστω $M_1 = (K_1, \Sigma, \delta_1, s_1, H_1)$, $M_2 = (K_2, \Sigma, \delta_2, s_2, H_2)$, $M_3 = (K_3, \Sigma, \delta_3, s_3, H_3)$ οι μηχανές του προηγούμενου σχήματος και $K_i \cap K_j = \emptyset$ για κάθε $1 \leq i, j \leq 3$ και $i \neq j$.
- Η νέα μηχανή $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ ορίζεται μαθηματικά ως εξής:

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

$$s = s_1$$

$$H = H_2 \cup H_3$$

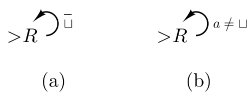
Συνδυασμοί Μηχανών Turing

- Για κάθε $\sigma \in \Sigma$ και $q \in K \setminus H$ η συνάρτηση $\delta(q, \sigma)$ ορίζεται ως εξής:
  - Αν $q \in K_1 \setminus H_1$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_1(q, \sigma)$.
  - Αν $q \in K_2 \setminus H_2$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_2(q, \sigma)$.
  - Αν $q \in K_3 \setminus H_3$ τότε $\delta(q, \sigma) = \delta_3(q, \sigma)$.
  - Αν $q \in H_1$ τότε
    - $\delta(q, \sigma) = s_2$ αν $\sigma = a$,
    - $\delta(q, \sigma) = s_3$ αν $\sigma = b$ και
    - $\delta(q, \sigma) \in H$ στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Παράδειγμα

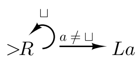
- Η παραπάνω μηχανή (a) αρχικά μετακινεί την κεφαλή ένα τετράγωνο προς τα δεξιά. Αν αυτό το τετράγωνο περιέχει $a, b, \sqcup$ ή $\triangleright$ τότε μετακινεί την κεφαλή άλλο ένα τετράγωνο προς τα δεξιά.
- Εναλλακτικά μπορούμε να συμβολίσουμε τη μηχανή αυτή όπως στο σχήμα (b).
- Αν $\Sigma = \{a, b, \sqcup, \triangleright\}$ τότε μπορούμε να παραστήσουμε την παραπάνω μηχανή με $R \rightarrow R$ ή RR ή R^2.

Παράδειγμα



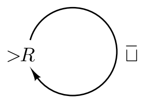
- Η μηχανή (a) σαρώνει την ταινία προς τα δεξιά μέχρι να βρει ένα κενό. Αν $a \in \Sigma$, η παράσταση $\overline{a}$ παριστάνει οποιοδήποτε σύμβολο εκτός από το a.
- Η μηχανή (b) έχει την ίδια λειτουργία με την (a). Ο συμβολισμός $a \neq \sqcup$ διαβάζεται "οποιοδήποτε σύμβολο a διαφορετικό από $\sqcup$".

Παράδειγμα

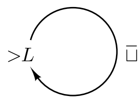


- Η παραπάνω μηχανή σαρώνει την ταινία προς τα δεξιά μέχρι να βρει το πρώτο μη κενό τετράγωνο. Μετά αντιγράφει το σύμβολο που βρήκε σ' αυτό το τετράγωνο στο τετράγωνο αμέσως αριστερά του.
- Εδώ βλέπουμε μια πιο ενδιαφέρουσα χρήση του συμβολισμού $a \neq \sqcup$: το a χρησιμοποιείται αλλού σαν όνομα μιας μηχανής.

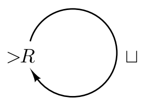
Μηχανές Ανεύρεσης



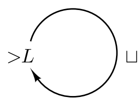
(a) $R_\sqcup$



(b) $L_\sqcup$



(c) $R_{\overline{\sqcup}}$

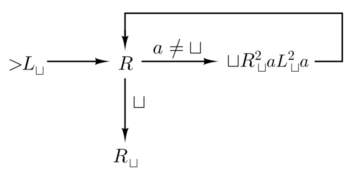


(d) $L_{\overline{\sqcup}}$

Μηχανές Ανεύρεσης

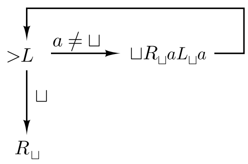
- Η μηχανή (a) βρίσκει το πρώτο κενό τετράγωνο στα δεξιά του τετραγώνου που σαρώνεται. Η μηχανή αυτή παριστάνεται με $R_\sqcup$.
- Η μηχανή (b) βρίσκει το πρώτο κενό τετράγωνο στα αριστερά του τετραγώνου που σαρώνεται. Η μηχανή αυτή παριστάνεται με $L_\sqcup$.
- Η μηχανή (c) βρίσκει το πρώτο μη κενό τετράγωνο στα δεξιά του τετραγώνου που σαρώνεται. Η μηχανή αυτή παριστάνεται με $R_{\overline{\sqcup}}$.
- Η μηχανή (c) βρίσκει το πρώτο μη κενό τετράγωνο στα αριστερά του τετραγώνου που σαρώνεται. Η μηχανή αυτή παριστάνεται με $L_{\overline{\sqcup}}$.

Παράδειγμα



- Η παραπάνω μηχανή C λέγεται **μηχανή αντιγραφής**. Η C **μετατρέπει** την ταινία $\sqcup w \underline{\sqcup}$ σε $\sqcup w \sqcup w \underline{\sqcup}$.

Παράδειγμα



- Η παραπάνω μηχανή **δεξιάς μετατόπισης** $S_{\rightarrow}$ μετατρέπει την ταινία $\sqcup w \underline{\sqcup}$, όπου η w δεν περιέχει κενά, σε $\sqcup \sqcup w \underline{\sqcup}$.
- **Σημείωση:** Η παραπάνω μηχανή είναι από το βιβλίο και δεν είναι σωστή. Για να έχετε τη σωστή μηχανή αντικαταστήσετε το $\sqcup R_{\sqcup} a L_{\sqcup} a$ με $\sqcup R a L_{\sqcup}$.

Υπολογισμοί με Μηχανές Turing

- Πως αρχίζει τη λειτουργία της μια μηχανή Turing;
  - Η συμβολοσειρά εισόδου δεν περιέχει κενά και γράφεται στα δεξιά του συμβόλου $\triangleright$, με ένα κενό στα αριστερά της (και πολλά κενά στα δεξιά της).
  - Η κεφαλή τοποθετείται στο κενό τετράγωνο που βρίσκεται ανάμεσα στο $\triangleright$ και στη συμβολοσειρά εισόδου.
  - Η μηχανή αρχίζει να λειτουργεί από την αρχική της κατάσταση.
- Αν $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ είναι μια μηχανή Turing και $w \in (\Sigma \setminus \{\sqcup, \triangleright\})^*$ τότε η **αρχική συνολική κατάσταση** της M με είσοδο w είναι $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$.

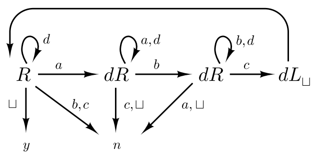
Ορισμοί

- Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια μηχανή Turing τέτοια ώστε $H = \{y, n\}$ ("yes" και "no"). Κάθε συνολική κατάσταση με κατάσταση τερματισμού y θα λέγεται **συνολική κατάσταση αποδοχής** ενώ κάθε συνολική κατάσταση με κατάσταση τερματισμού n θα λέγεται **συνολική κατάσταση απόρριψης**.
- Θα λέμε ότι η M **δέχεται** την συμβολοσειρά εισόδου $w \in (\Sigma \setminus \{\sqcup, \triangleright\})^*$ αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση αποδοχής. Θα λέμε ότι η M **απορρίπτει** την w αν $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$ παράγει μια συνολική κατάσταση απόρριψης.
- Υπάρχει περίπτωση μια μηχανή Turing να μην δέχεται αλλά ούτε να απορρίπτει μια συμβολοσειρά;

Αναδρομικές ή Αποφασίσιμες Γλώσσες

- Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \setminus \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο, το **αλφάβητο εισόδου** της M. Θα λέμε ότι η M **αποφασίζει (decides)** τη γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ η ακόλουθη πρόταση ισχύει: Αν $w \in L$ τότε η M δέχεται την w, και αν $w \notin L$ τότε η M απορρίπτει την w.
- Μια γλώσσα L θα λέγεται **αναδρομική** ή **αποφασίσιμη** (recursive or decidable) αν υπάρχει μηχανή Turing που την αποφασίζει.

Παράδειγμα



- Η παραπάνω μηχανή αποφασίζει τη γλώσσα $\{a^n b^n c^n : \ n \geq 0\}$ (οι μηχανές y και n κάνουν την νέα κατάσταση να είναι η κατάσταση αποδοχής y ή n αντίστοιχα).

Αναδρομικές Συναρτήσεις

- Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια μηχανή Turing, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \setminus \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και $w \in \Sigma_0^*$. **Υποθέτουμε ότι η M τερματίζει** με είσοδο w και $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}y)$ για κάποιο $y \in \Sigma_0^*$. Τότε η συμβολοσειρά y λέγεται **έξοδος της f με είσοδο** w και παριστάνεται με $M(w)$.
- Έστω f μια συνάρτηση από το Σ_0^* στο Σ_0^*. Λέμε ότι η M **υπολογίζει την συνάρτηση** f αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$.
- Μια συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$ λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει μηχανή Turing που την υπολογίζει.

Παράδειγμα

- Έστω Σ ένα αλφάβητο και $\Sigma \cap \{\sqcup, \triangleright\} = \emptyset$.
- Η συνάρτηση $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ που ορίζεται σαν $\kappa(w) = ww$ είναι αναδρομική.
- Η μηχανή Turing που την υπολογίζει μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα χρησιμοποιώντας τη μηχανή αντιγραφής C και τη μηχανή αριστερής μετατόπισης $S_{\leftarrow}$.

Συναρτήσεις με Φυσικούς Αριθμούς

- Κάθε συμβολοσειρά $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \{0, 1\}^*$ παριστάνει τον αριθμό

$$num(w) = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \cdots + a_n.$$

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με μοναδικό τρόπο με μια συμβολοσειρά του αλφάβητου $0 \cup 1\{0, 1\}^*$.
- Για να υπολογίσουμε μια συνάρτηση από το $\mathbf{N}^k$ στο $\mathbf{N}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μηχανή Turing που υπολογίζει μια συνάρτηση από το $\{0, 1, ;\}^*$ στο $\{0, 1\}^*$ όπου ";" είναι το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για να ξεχωρίσουμε τα k δυαδικά ορίσματα.

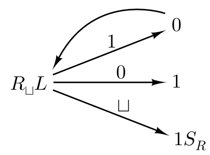
Αναδρομικές Συναρτήσεις

- Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ μια μηχανή Turing τέτοια ώστε $0, 1, ; \in \Sigma$ και f μια συνάρτηση από το $\mathbf{N}^k$ στο $\mathbf{N}$ για κάποιο $k \geq 1$.
- Λέμε ότι η M **υπολογίζει** τη συνάρτηση f αν για κάθε $w_1, \ldots, w_k \in 0 \cup 1\{0,1\}^*$

$$num(M(w_1; \ldots ; w_k)) = f(num(w_1), \ldots, num(w_k)).$$

Μια συνάρτηση f από το $\mathbf{N}^k$ στο $\mathbf{N}$ λέγεται **αναδρομική** αν υπάρχει μηχανή Turing που την υπολογίζει.

Παράδειγμα



- Η παραπάνω μηχανή Turing υπολογίζει την συνάρτηση $succ(n) = n + 1$ (αλλά δεν τερματίζει με τη κεφαλή στο κενό τετράγωνο αριστερά της συμβολοσειράς εξόδου).

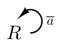
Αναδρομικά Αριθμήσιμες ή Ημιαποφασίσιμες Γλώσσες

- Έστω $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ μια μηχανή Turing, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma \setminus \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και $L \subseteq \Sigma_0^*$ μια γλώσσα.
- Λέμε ότι η M **ημιαποφασίζει (semidecides)** τη γλώσσα L αν για κάθε συμβολοσειρά $w \in \Sigma_0^*$ η ακόλουθη πρόταση ισχύει: $w \in L$ αν και μόνο αν η M τερματίζει με είσοδο w.
- Μια γλώσσα L θα λέγεται **αναδρομικά αριθμήσιμη** ή **ημιαποφασίσιμη** (recursively enumerable or semidecidable) αν υπάρχει μηχανή Turing που την ημιαποφασίζει.

Αναδρομικά Αριθμήσιμες Γλώσσες

- Αν M είναι μια μηχανή Turing που ημιαποφασίζει τη γλώσσα L και η M ξεκινά την λειτουργία της με είσοδο $w \in L$ τότε πρέπει τελικά να τερματίσει (αλλά δεν μας ενδιαφέρει η ακριβής συνολική κατάσταση).
- Αν όμως $w \notin L$ τότε η M δεν πρέπει ποτέ να τερματίσει (θα πρέπει να πέσει σε βρόχο – loop). Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $M(w) = \nearrow$.

Παράδειγμα



- Η παραπάνω μηχανή Turing ημιαποφασίζει την γλώσσα

$$\{w \in \{a, b\}^* : \text{ η } w \text{ περιέχει τουλάχιστον ένα } a\}$$

Αναδρομικά Αριθμήσιμες Γλώσσες

- **Θεώρημα.** Αν μια γλώσσα είναι αναδρομική τότε είναι αναδρομικά αριθμήσιμη.
- **Απόδειξη:** Έστω L μια αναδρομική γλώσσα και $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια μηχανή Turing που την αποφασίζει. Η γλώσσα $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$ όπου δ' είναι η δ μαζί με τις μεταβάσεις

$$\delta'(n, a) = (n, a) \text{ για κάθε } a \in \Sigma$$

για το n (που δεν είναι πια κατάσταση τερματισμού) **ημιαποφασίζει** την L.

Αναδρομικά Αριθμήσιμες Γλώσσες

- **Θεώρημα.** Αν L είναι μια αναδρομική γλώσσα τότε το συμπλήρωμα της $\overline{L}$ είναι επίσης μια αναδρομική γλώσσα.

Απόδειξη:

- Έστω L μια αναδρομική γλώσσα και $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ μια μηχανή Turing που την αποφασίζει.
- Η γλώσσα $\overline{L}$ αποφασίζεται από την μηχανή Turing $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y, n\})$ η οποία **εναλλάσει τους ρόλους των καταστάσεων τερματισμού** y **και** n. Η συνάρτηση μετάβασης δ' ορίζεται ως εξής:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} n & \text{αν } \delta(q, a) = y \\ y & \text{αν } \delta(q, a) = n \\ \delta(q, a) & \text{στις υπόλοιπες περιπτώσεις} \end{cases}$$

Μελέτη

- Κεφάλαια 4.1-4.2 από το βιβλίο:
  Harry R. Lewis και Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, 1992.