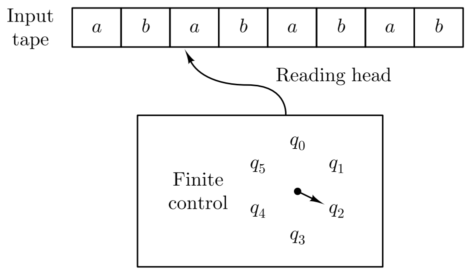
Θεωρία Υπολογισμού

Αυτόματα Στοίβας

2003-04

1

Πεπερασμένα Αυτόματα



2

Παράδειγμα

- Θεωρείστε τη γλώσσα

$$\{ \, ww^R : \ w \in \{a, b\}^* \, \}.$$

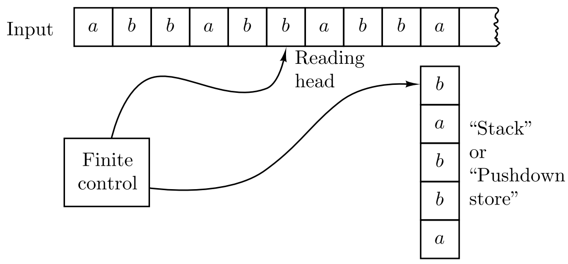
Η παραπάνω γλώσσα δεν μπορεί να αναγνωριστεί από ένα πεπερασμένο αυτόματο. Όμως μπορεί να παραχθεί από την γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ όπου

  - $V = \{S, a, b\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $R = \{ \ S \longrightarrow aSa, \ \ S \longrightarrow bSb, \ \ S \longrightarrow e \ \}$

- Τι χρειάζεται ένα πεπερασμένο αυτόματο ώστε να αναγνωρίζει γλώσσες όπως την παραπάνω;

3

Αυτόματα Στοίβας



4

Αυτόματα Στοίβας

- **Ορισμός.** Ένα **μη ντετερμινιστικό αυτόματο στοίβας** είναι μια εξάδα

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

όπου

  - K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις
  - Σ είναι ένα αλφάβητο (τα **σύμβολα εισόδου**),
  - Γ είναι ένα αλφάβητο (τα **σύμβολα της στοίβας**),
  - $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**,
  - $F \subseteq K$ είναι το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**, και
  - Δ, η **σχέση μετάβασης**, είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $(K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$.

5

Αυτόματα Στοίβας

- **Μετάβαση** ενός αυτόματου στοίβας M ονομάζεται ένα ζευγάρι $((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$.
- Διαισθητικά: όποτε το M είναι στη κατάσταση p με το β στην κορυφή της στοίβας και διαβάζει από την ταινία εισόδου u, αντικαθιστά το β με γ στην κορυφή της στοίβας και πηγαίνει στη κατάσταση q.
- Η μετάβαση $((p, u, e), (q, \alpha))$ **εισάγει** (push) το σύμβολο α ενώ αντίθετα η μετάβαση $((p, u, \alpha), (q, e))$ το **εξάγει** (pop).

6

Αυτόματα Στοίβας

- Μια **συνολική κατάσταση** (**configuration**) ενός αυτόματου στοίβας $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ είναι ένα στοιχείο (q, w, α) του συνόλου $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.
- Μια συνολική κατάσταση (q, w, α) περιγράφει σε ποιά κατάσταση (q) βρίσκεται το αυτόματο, ποια συμβολοσειρά απομένει για να διαβαστεί (w) και ποιά είναι τα περιεχόμενα της στοίβας διαβασμένα από πάνω προς τα κάτω (α).

7

Αυτόματα Στοίβας

- **Η σχέση $\vdash_M$ (παράγει σε ένα βήμα):**
Αν $((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$ είναι μια μετάβαση ενός αυτόματου στοίβας $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ και $x \in \Sigma^*$ και $\alpha \in \Gamma^*$, τότε

$$(p, ux, \beta\alpha) \vdash_M (q, x, \gamma\alpha).$$

- Η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της σχέσης $\vdash_M$ είναι η $\vdash_M^*$ (**παράγει**).

8

Αυτόματα Στοίβας

- Το αυτόματο στοίβας $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ **δέχεται** μία συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ ανν $(s, w, e) \vdash_M^* (p, e, e)$ για κάποια κατάσταση $p \in F$.
- Η **γλώσσα που γίνεται δεκτή** από το M συμβολίζεται με $L(M)$ και είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που γίνονται δεκτές από το M.

Παράδειγμα

- Κάθε **πεπερασμένο αυτόματο** μπορεί να θεωρηθεί σαν αυτόματο στοίβας που δεν χρησιμοποιεί ποτέ την στοίβα του.
- Για παράδειγμα, έστω $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ ένα πεπερασμένο αυτόματο. Τότε το αυτόματο στοίβας $M' = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F)$ όπου $\Gamma = \emptyset$ και

$$\Delta' = \{((p, u, e), (q, e)) : \ (p, u, q) \in \Delta\}$$

δέχεται την ίδια γλώσσα με το M.

Παράδειγμα

- Σχεδιάστε ένα αυτόματο στοίβας M που να δέχεται τη γλώσσα

$$L = \{wcw^R : \ w \in \{a, b\}^*\}.$$

- **Κατασκευή:**

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

όπου

$$K = \{s, f\}, \quad \Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad F = \{f\}$$

$$\Delta = \{ \ ((s, a, e), (s, a)), \ ((s, b, e), (s, b)), \ ((s, c, e), (f, e)),$$
$$((f, a, a), (f, e)), \quad ((f, b, b), (f, e)) \ \}$$

Παράδειγμα

- Σχεδιάστε ένα αυτόματο στοίβας που δέχεται τη γλώσσα

$$\{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}.$$

- **Κατασκευή:**

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

όπου

$$K = \{s, f\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad F = \{f\}$$

$$\Delta = \{ \ ((s, a, e), (s, a)), \ ((s, b, e), (s, b)), \ ((s, e, e), (f, e)),$$
$$((f, a, a), (f, e)), \quad ((f, b, b), (f, e)) \ \}$$

Παράδειγμα

- Σχεδιάστε ένα αυτόματο στοίβας που δέχεται τη γλώσσα

$$\{w \in \{a, b\}^* \ : w \text{ έχει ίσο αριθμό } a \text{ και } b\}.$$

- **Κατασκευή:**

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

$$K = \{s, q, f\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, c\}, \quad F = \{f\}$$

$$\Delta = \{ \ ((s, e, e), (q, c)), \quad ((q, a, c), (q, ac)), \quad ((q, b, c), (q, bc)),$$
$$((q, a, a), (q, aa)), \quad ((q, b, b), (q, bb)),$$
$$((q, a, b), (q, e)), \quad ((q, b, a), (q, e)), \quad ((q, e, c), (f, e)) \ \}$$

Ντετερμινιστικά Αυτόματα Στοίβας

- Διαισθητικά ένα αυτόματο στοίβας είναι ντετερμινιστικό αν σε κάθε περίπτωση υπάρχει μια το πολύ δυνατή μετάβαση.
- **Ορισμός.** Ένα αυτόματο στοίβας M είναι **ντετερμινιστικό** αν για κάθε συνολική κατάσταση (p, w, γ) του M και για κάποια προθέματα w_1, w_2 της w, και γ_1, γ_2 της γ, και οι δύο μεταβάσεις του M, $((p, w_1, \gamma_1), (q_1, \delta_1))$ και $((p, w_2, \gamma_2), (q_2, \delta_2))$ είναι ίδιες:

$$w_1 = w_2, \ \gamma_1 = \gamma_2, \ q_1 = q_2, \ \delta_1 = \delta_2.$$

Παράδειγμα

- Το παρακάτω αυτόματο στοίβας M που δέχεται τη γλώσσα

$$L = \{wcw^R : \ w \in \{a, b\}^*\}$$

είναι ντετερμινιστικό.

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

όπου

$$K = \{s, f\}, \quad \Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad F = \{f\}$$

$$\Delta = \{ \ ((s, a, e), (s, a)), \ ((s, b, e), (s, b)), \ ((s, c, e), (f, e)),$$
$$((f, a, a), (f, e)), \quad ((f, b, b), (f, e)) \ \}.$$

Παράδειγμα

- Το παρακάτω αυτόματο στοίβας M που δέχεται τη γλώσσα

$$\{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}.$$

δεν είναι ντετερμινιστικό.

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

όπου

$$K = \{s, f\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad F = \{f\}$$

$$\Delta = \{ \ ((s, a, e), (s, a)), \ ((s, b, e), (s, b)), \ ((s, e, e), (f, e)),$$
$$((f, a, a), (f, e)), \quad ((f, b, b), (f, e)) \ \}.$$

Ντετερμινιστικά Αυτόματα Στοίβας

- Η γλώσσα

$$\{ww^R : \ w \in \{a,b\}^*\}$$

δεν μπορεί να γίνει δεκτή από ένα ντετερμινιστικό αυτόματο στοίβας. Αρα η έννοια του ντετερμινιστικού αυτόματου στοίβας **δεν είναι ισοδύναμη** με την έννοια του μη ντετερμινιστικού.

- Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με μη ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας.

Αυτόματα και Γλώσσες

- **Λήμμα.** Κάθε γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα γίνεται δεκτή από κάποιο αυτόματο στοίβας.

Απόδειξη.

- Έστω L μια γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Τότε $L = L(G)$ όπου $G = (V, \Sigma, R, S)$ είναι μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.
- Το αυτόματο $M = (\{p,q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$ όπου

$$\Delta = \{ \ ((p,e,e),(q,S)) \ \} \ \cup$$

$$\{ \ ((q,e,A),(q,x)) : \ A \to x \text{ είναι κανόνας του } R \ \} \ \cup$$

$$\{ \ ((q,\alpha,\alpha),(q,e)) : \ \alpha \in \Sigma \ \}$$

είναι τέτοιο ώστε $L(M) = L(G)$.

Συνέχεια της Απόδειξης

- Η απόδειξη του λήμματος στηρίζεται στις παρακάτω προτάσεις που μπορούν να αποδειχτούν με επαγωγή:
- **Πρόταση 1.** Έστω $\alpha_1 \in \Sigma^*$ και $\alpha_2 \in (V - S)V^* \cup \{e\}$. Αν $S \Longrightarrow_G^{*L} \alpha_1\alpha_2$ τότε $(q, \alpha_1, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha_2)$.
- **Πρόταση 2.** Έστω $\alpha_1 \in \Sigma^*$ και $\alpha_2 \in V^*$. Αν $(q, \alpha_1, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha_2)$ τότε $S \Longrightarrow_G^{*L} \alpha_1\alpha_2$.

Παράδειγμα

- Θεωρείστε την γραμματική $G = (V, \Sigma, R, S)$ με

$$V = \{S, a, b, c\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \{ \ S \longrightarrow aSa, \ S \longrightarrow bSb, \ S \longrightarrow c \ \}$$

που παράγει τη γλώσσα $\{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\}$.

Παράδειγμα

- Το αντίστοιχο αυτόματο στοίβας είναι $M = (\{p,q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$ με

$$\begin{gathered}\Delta = \{ \ ((p,e,e),(q,S)), \\ ((q,e,S),(q,aSa)), \\ ((q,e,S),(q,bSb)), \\ ((q,e,S),(q,c)), \\ ((q,a,a),(q,e)), \\ ((q,b,b),(q,e)), \\ ((q,c,c),(q,e)) \ \}.\end{gathered}$$

Αυτόματα και Γλώσσες

- **Λήμμα.** Αν μια γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο στοίβας, τότε είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
- **Απόδειξη.** Παραλείπεται.

Αυτόματα και Γραμματικές

- **Θεώρημα.** Η κλάση των γλωσσών που είναι δεκτές από τα αυτόματα στοίβας είναι ακριβώς η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα.
- **Απόδειξη:** Από τα δύο προηγούμενα λήμματα.
- **Σημείωση:** Το σύνολο των γλωσσών που γίνονται δεκτές από ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα. Ευτυχώς στις γλώσσες αυτές συμπεριλαμβάνονται οι περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό για τη θεωρία μεταγλώττισης αλλά εμείς δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο μ' αυτό.

Μελέτη

- Κεφάλαια 3.3-3.4 από το βιβλίο:
Harry R. Lewis και Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, 1992.