Θεωρία Υπολογισμού

Πεπερασμένα Αυτόματα

2003-04

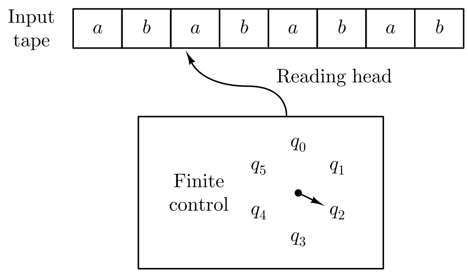
1

Πεπερασμένα Αυτόματα

- Ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα.
- Μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα.
- Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και μη ντετερμινιστικών αυτομάτων.

2

Πεπερασμένα Αυτόματα



3

Πεπερασμένα Αυτόματα: Γιατί τα μελετάμε;

- Απλοκό μοντέλο υπολογισμού (πεπερασμένη κύρια μνήμη, καθόλου δευτερεύουσα μνήμη, καθόλου έξοδος, η είσοδος είναι πάντα μια συμβολοσειρά).
- Μηχανισμός αναγνώρισης γλωσσών
- Εφαρμογές σε λεκτικούς αναλυτές (π.χ. LEX), editors (π.χ. vi), reactive systems.

4

Πεπερασμένα Αυτόματα: Ορισμοί

- Ένα **ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο** είναι μια πεντάδα

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

όπου:

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το **σύνολο καταστάσεων**,
- Σ είναι ένα **αλφάβητο**,
- $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**,
- $F \subseteq K$ είναι το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**, και
- δ είναι μια συνάρτηση από το $K \times \Sigma$ στο K που ονομάζεται **συνάρτηση μετάβασης**.

5

Πεπερασμένα Αυτόματα: Παράδειγμα

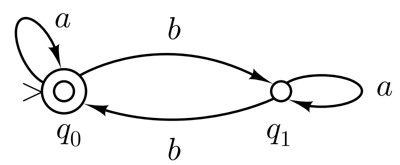
$$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$$

- $K = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $s = q_0$
- $F = \{q_0\}$
- δ ορίζεται από τον πίνακα:

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_1
q_1	b	q_0

6

Πεπερασμένα Αυτόματα: Γραφική Παράσταση



7

Πεπερασμένα Αυτόματα: Ορισμοί

- Μια **συνολική κατάσταση** η απλά **κατάσταση** (**configuration**) ενός ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $K \times \Sigma^*$.
- Μια κατάσταση $(q, w) \in K \times \Sigma^*$ περιγράφει σε ποιά κατάσταση (q) βρίσκεται το αυτόματο, και ποια συμβολοσειρά (w) απομένει για να διαβαστεί.
- Το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου M θα συμβολίζεται με $Config(M)$.

8

Πεπερασμένα Αυτόματα: Ορισμοί

- Η δυαδική σχέση **"παράγει σε ένα βήμα"** (συμβολισμός: $\vdash_M$) είναι ένα υποσύνολο του $Config(M) \times Config(M)$ και ορίζεται ως εξής:

$$(q, w) \vdash_M (q', w')$$

ανν υπάρχει ένα σύμβολο $a \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $w = aw'$ και $\delta(q, a) = q'$.

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η (q, w) **παράγει την** (q', w') **σε ένα βήμα**.
- Η $\vdash_M$ είναι ουσιαστικά συνάρτηση.
- Η λειτουργία ενός αυτομάτου τερματίζεται σε μια κατάσταση (q, e).

9

Ανακλαστική και Μεταβατική Κλειστότητα

- **Ορισμός:** Έστω σύνολα A_1, A_2 και $R \subseteq A_1 \times A_2$ μια δυαδική σχέση. Η **μεταβατική κλειστότητα** (transitive closure) της σχέσης R είναι μια σχέση R^+ που ορίζεται ως εξής:
  - Αν $(a, b) \in R$ τότε $(a, b) \in R^+$.
  - Αν $(a, b) \in R^+$ και $(b, c) \in R$ τότε $(a, c) \in R^+$.
  - Μόνο τα ζευγάρια που παράγονται από τους παραπάνω κανόνες ανήκουν στην R^+.
- Η **ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα** (reflexive and transitive closure) της σχέσης $R \subseteq A \times A$ είναι μια σχέση R^* που ορίζεται ως εξής:
  - $R^* = R^+ \cup \{(a, a) |\ a \in A\}$
- Η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της σχέσης $\vdash_M$ συμβολίζεται με $\vdash_M^*$.
  - Αν $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ τότε λέμε ότι η (q, w) **παράγει** την (q', w') (μετά από κάποιο αριθμό βημάτων - ίσως και μηδέν).

10

Η Γλώσσα ενός Πεπερασμένου Αυτόματου

- **Ορισμός:** Μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ είναι **δεκτή** από το αυτόματο $M = (K, \Sigma, s, F, \delta)$ ανν υπάρχει μια κατάσταση $q \in F$ έτσι ώστε $(s, w) \vdash_M^* (q, e)$.
- **Ορισμός:** Η **γλώσσα που γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο** M είναι το σύνολο των συμβολοσειρών του Σ^* που είναι δεκτές από το M (συμβολισμός: $L(M)$).

11

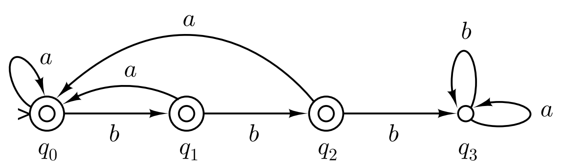
Άσκηση

- Κατασκευάστε ένα πεπερασμένο αυτόματο που δέχεται την εξής γλώσσα:

$$L = \{w :\ w \in \{a, b\}^* \ \text{ και } \ w \ \text{ δεν περιέχει τρια συνεχόμενα } b\}$$

12

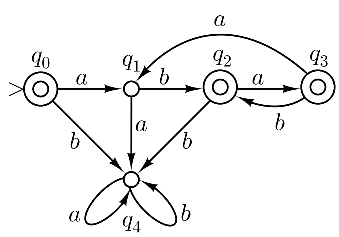
Λύση



13

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

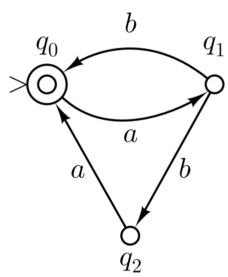
- Ποιά είναι η γλώσσα που γίνεται δεκτή από το ακόλουθο **ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο;



14

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

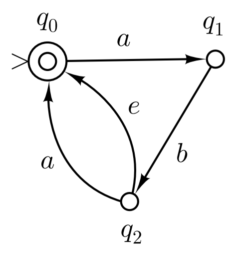
- Το παρακάτω **μη ντετερμινιστικό** αυτόματο είναι λιγότερο πολύπλοκο από το προηγούμενο, και κάνει δεκτή την ίδια γλώσσα.



15

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

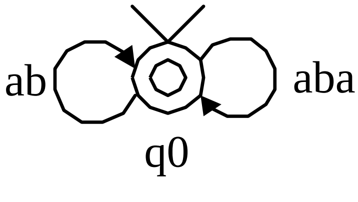
- e-μεταβάσεις:



16

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Μεταβάσεις με ανάγνωση συμβολοσειράς:



17

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα: Ορισμοί

- Ένα **μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο** είναι μία πεντάδα

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$$

όπου:

- K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το **σύνολο καταστάσεων**.
- Σ είναι ένα **αλφάβητο**.
- $s \in K$ είναι η **αρχική κατάσταση**.
- $F \subseteq K$ είναι το σύνολο των **τελικών καταστάσεων**
- Δ είναι η **σχέση μετάβασης**, ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $K \times \Sigma^* \times K$.

18

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Μια **συνολική κατάσταση** ή απλά **κατάσταση** (**configuration**) ενός μη ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $K \times \Sigma^*$.
- Το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου M θα συμβολίζεται με $Config(M)$.
- Η δυαδική σχέση **"παράγει σε ένα βήμα"** (συμβολισμός: $\vdash_M$) είναι ένα υποσύνολο του $Config(M) \times Config(M)$ και ορίζεται ως εξής:

$$(q, w) \vdash_M (q', w')$$

αννυπάρχει μια συμβολοσειρά $u \in \Sigma^*$ τέτοια ώστε $w = uw'$ και $(q, u, q') \in \Delta$.

19

Μη Ντετερμινιστικά Πεπερασμένα Αυτόματα

- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η (q, w) **παράγει την** (q', w') **σε ένα βήμα.**
- Η $\vdash_M$ δεν είναι υποχρεωτικά συνάρτηση.
- Η δυαδική σχέση **"παράγει"** είναι η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα της $\vdash_M$ (συμβολισμός: $\vdash_M^*$).

20

Γλώσσες

- **Ορισμός:** Μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ είναι **δεκτή** από το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $M = (K, \Sigma, s, F, \Delta)$ ανν υπάρχει μια κατάσταση $q \in F$ έτσι ώστε $(s, w) \vdash_M^* (q, e)$.
- **Ορισμός:** Η **γλώσσα που γίνεται δεκτή από ένα αυτόματο** M είναι το σύνολο των συμβολοσειρών του Σ^* που είναι δεκτές από το M (συμβολισμός: $L(M)$).
- **Άσκηση:** Κατασκευάστε ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που δέχεται το σύνολο όλων των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{a, b\}$ που περιέχουν μια εμφάνιση της συμβολοσειράς bab ή της συμβολοσειράς $baab$.

21

Ισοδυναμία

- **Ορισμός:** Δύο πεπερασμένα αυτόματα M_1 και M_2 ονομάζονται **ισοδύναμα** ανν $L(M_1) = L(M_2)$.
- **Θεώρημα:** Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο υπάρχει ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.
- Απόδειξη;

22

Αλγόριθμος

Αλγόριθμος NDFAtoDFA
Είσοδος: Μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο $M = (K, \Sigma, s, F, \Delta)$
Έξοδος: Ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M''
Μέθοδος:

- **Βήμα 1:** Απαλοιφή μεταβάσεων $(q, u, q') \in \Delta$ έτσι ώστε $|u| > 1$.
Για να απαλείψουμε κάθε βέλος $q \xrightarrow{a_1 a_2 \dots a_k} q'$ του M, προσθέτουμε νέες μη τελικές καταστάσεις $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ στο K, και μια **"αλυσίδα" από βέλη**

$$q \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots p_{k-1} \xrightarrow{a_n} q'$$

στο M.
Έστω ότι το νέο αυτόματο είναι το $M' = (K', \Sigma, \Delta', s', F')$.

23

Αλγόριθμος

- **Βήμα 2:** Κατασκευή του ντετερμινιστικού αυτόματου $M'' = (K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$ ως εξής:

$$K'' = 2^{K'}, \;\; s'' = E(s')$$

$$F'' = \{Q \subseteq K' : \; Q \cap F' \neq \emptyset\}$$

$$\delta''(Q, \sigma) = \bigcup \{E(p) : \; p \in K' \text{ και } (q, \sigma, p) \in \Delta' \text{ για κάποιο } q \in Q\}$$

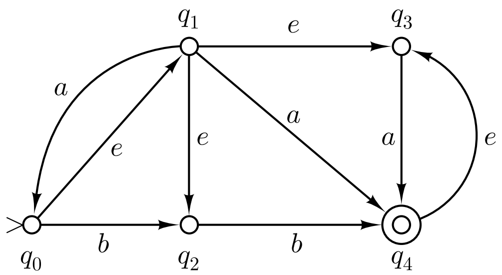
Αν q είναι μια κατάσταση του K', τότε το $E(q)$ είναι το σύνολο όλων των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να μεταβεί το M' από την q χωρίς να διαβάσει κανένα σύμβολο (δηλ. να διαβάσει μόνο e):

$$E(q) = \{p \in K' : \; (q, e) \vdash_{M'}^* (p, e)\}$$

24

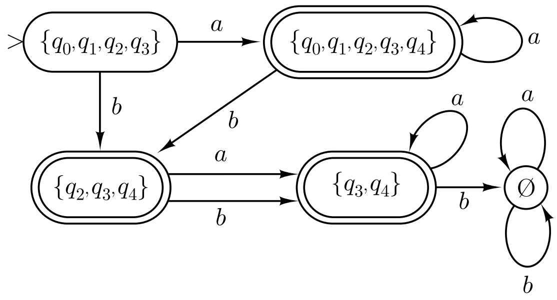
Παράδειγμα

- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο:



Παράδειγμα

- Ντετερμινιστικό αυτόματο ισοδύναμο με το προηγούμενο:



Ισοδυναμία

- Γιατί είναι ο αλγόριθμος NDFAtoDFA σωστός;
  - Το αυτόματα M'' είναι ντετερμινιστικό
  - $L(M) = L(M') = L(M'')$ διότι

$$(q, w) \vdash^*_{M'} (p, e) \quad \text{ανν} \quad (E(q), w) \vdash^*_{M''} (P, e) \quad \text{και} \quad p \in P$$

Μελέτη

- Κεφάλαια 2.1-2.3 από το βιβλίο:
  Harry R. Lewis και Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, 1992.