Θεωρία Υπολογισμού

Σύνολα, σχέσεις, αλφάβητα και γλώσσες

2003-04

1

Λογικές προτάσεις

- Προτάσεις.
  - Αληθείς ή ψευδείς.

Η λέξη πεπόνι έχει περισσότερα πι απ' ότι ιώτα.

- Σχέσεις ανάμεσα σε προτάσεις.
  - Προτασιακές σχέσεις.

Η λέξη πεπόνι έχει περισσότερα πι απ' ότι ιώτα **και** η λέξη επιρροή έχει δύο συνεχόμενα ρο.

2

Λογικοί σύνδεσμοι

Έστω ότι τα p και q είναι λογικές προτάσεις.

- $\neg p$
  - Λογική άρνηση – διαβάζεται p όχι q.
- $p \wedge q$
  - Λογική σύζευξη – διαβάζεται p και q.
- $p \vee q$
  - Λογική διάζευξη – διαβάζεται p ή q.
- $p \Rightarrow q$
  - Λογική συνεπαγωγή $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ – διαβάζεται αν p τότε q ή p μόνο αν q ή q αν p.
- $p \Leftrightarrow q$
  - Λογική ισοδυναμία $(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ – διαβάζεται p αν και μόνο αν q και για συντομία γράφεται και ως p ανν q.

3

Λογικοί σύνδεσμοι – πίνακες αληθείας

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

- **Άσκηση:** Τί πρέπει να κάνω για να αποδείξω ότι ισχύει μια λογική πρόταση;

4

Σύνολα

- **Σύνολο:** Συλλογή από αντικείμενα.
- **Παράδειγμα:** Η συλλογή των γραμμάτων a, b, c, d είναι ένα σύνολο που μπορούμε να το ονομάσουμε L. Τότε γράφουμε $L = \{a, b, c, d\}$.
- **Παρατηρήσεις:** Σε ένα σύνολο δεν διακρίνουμε επαναλήψεις ή διάταξη, π.χ., $\{3, 1, 9, 1\} = \{9, 3, 1\} = \{1, 3, 9\}$.
  Ένα μονοσύνολο είναι διαφορετικό απο το στοιχείο που περιλαμβάνει, π.χ., $\{1\} \neq 1$.
- **Αναπαράσταση συνόλων:** Είτε με απαρίθμηση στοιχείων π.χ., $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ είτε με κανόνα $N = \{x : x \text{ μη-αρνητικός φυσικός}\}$.
- **Ανήκει $\in$ και δεν ανήκει $\notin$:** Π.χ., $b \in L$ και $f \notin L$.
- **Δυναμοσύνολο:** Η συλλογή όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου A και συμβολίζεται με 2^A.

5

Πράξεις συνόλων

- **Ένωση** $\cup$: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.
- **Τομή** $\cap$: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
- **Διαφορά** $-$: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- **Ιδιότητες**

Ανακλαστική	$A \cap A = A$, $A \cup A = A$
Αντιμεταθετική	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
Προσεταιριστική	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Απορροφητικό στοιχείο	$A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$
Νόμοι DeMorgan	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

6

Σχέσεις

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνολα για τον ορισμό σχέσεων.
- **Πρόβλημα:** Πως αναπαριστούμε την σχέση πατέρας και την σχέση μικρότερο $<$. Χρειαζόμαστε διάταξη.
- Το **διατεταγμένο ζεύγος** δύο στοιχείων a και b συμβολίζεται με (a, b).
  - $(a, b) \neq \{a, b\}$
  - $(a, b) \neq (b, a)$
  - $(a, b) = (c, d)$ αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$
- Το **Καρτεσιανό γινόμενο** δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με $A \times B$ είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με $a \in A$ και $b \in B$.
- **Παράδειγμα:**
  $\{1, 3\} \times \{b, c, d\} = \{(1, b), (1, c), (1, d), (3, b), (3, c), (3, d)\}$.
- Αντίστοιχα ορίζουμε την διατεταγμένη νι-άδα και το καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων.

7

Σχέσεις (συνέχεια)

- **Ορισμός:** Μια δυαδική σχέση μεταξύ των συνόλων A και B είναι υποσύνολο του $A \times B$.
- **Παραδείγματα:**
  - Το $\{(1, b), (1, c), (3.d), (9, d)\}$ είναι μία δυαδική σχέση ανάμεσα στα σύνολα $\{1, 3, 9\}$ και $\{b, c, d\}$.
  - Το $\{(i, j) : i, j \in N \text{ και } i < j\}$ είναι μία δυαδική σχέση ανάμεσα στους ακεραίους.
- **Ορισμός:** Κάθε δυαδική σχέση $R \subseteq A \times B$ έχει μία αντίστροφη $R^{-1} \subseteq B \times A$ που ορίζεται ως $(b, a) \in R^{-1}$ αν και μόνο αν $(a, b) \in R$.
- **Ορισμός:** Μια σχέση μεταξύ των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ είναι υποσύνολο του $A_1 \times \cdots \times A_n$.

8

Συναρτήσεις

- **Ορισμός:** Μία συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B, συμβολικά $f : A \to B$, είναι μία δυαδική σχέση R πάνω στα A και B με την εξής ιδιότητα: για κάθε στοιχείο $a \in A$ υπάρχει ακριβώς ένα διατεταγμένο ζεύγος στο R με πρώτο στοιχείο το a.

Έστω συνάρτηση $f : A \to B$

- **Ένα προς ένα:** αν για κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία του A, $a, a' \in A$, $f(a) \neq f(a')$.
- **Επί του B:** αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A.
- **Αμφιμονοσήμαντη:** αν είναι ένα προς ένα και επί του B.
- Αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη τότε και η f^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη και ισχύει: $f^{-1}(f(a)) = a$ και $f(f^{-1}(b)) = b$.
- **Σύνθεση:** $(f \circ g)(a) = g(f(a))$.

Ειδικοί τύποι σχέσεων

Έστω οι σχέσεις $Q \subseteq A \times A$ και $R \subseteq A \times B$.

- **Ανακλαστική:** αν $(a, a) \in Q$ για κάθε $a \in Q$.
- **Συμμετρική:** αν $(b, a) \in R$ όποτε $(a, b) \in R$.
- **Αντισυμμετρική:** αν όποτε $(a, b) \in R$ και τα a και b είναι διαφορετικά, τότε $(b, a) \notin R$.
- **Μεταβατική:** αν όποτε $(a, b) \in R$ και $(b, c) \in R$ τότε και $(a, c) \in R$.
- **Ισοδυναμίας:** Ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
  - Αν R σχέση ισοδυναμίας τότε συμβολίζουμε με $[a]$ την κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το a, δηλαδή, $[a] = \{b : (a, b) \in R\} = \{b : (b, a) \in R\}$.
- **Μερικής διάταξης:** Ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.
- **Ολικής διάταξης:** Μερικής διάταξης και ισχύει $(\forall a, b \in A)(\ ((a, b) \in Q) \vee ((b, a) \in Q)\ )$.

Αλφάβητα και Συμβολοσειρές

Ορισμοί:

- **Αλφάβητο** είναι ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων.
  Συνήθως χρησιμοποιούμε το Σ για να συμβολίσουμε ένα αλφάβητο.
  Παράδειγμα: $\Sigma = \{a, b, c, +, 1, \%\}$.
- **Συμβολοσειρά** ενός αλφάβητου είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφάβητου.
  Συνήθως χρησιμοποιούμε γράμματα του ελληνικού αλφάβητου ή γράμματα από το τέλος του Αγγλικού αλφάβητου (π.χ. u, v, w, x, y, z) για να συμβολίσουμε μια συμβολοσειρά.
- **Κενή συμβολοσειρά:** e

Συμβολοσειρές (συνέχεια)

- Το σύνολο των συμβολοσειρών ενός αλφαβήτου Σ συμβολίζεται με Σ^* (η κενή συμβολοσειρά ανήκει στο Σ^*).
- **Ορισμός:** Το **μήκος** μιας συμβολοσειράς είναι το μήκος της ως ακολουθίας και συμβολίζεται με $|\cdot|$.
  Παραδείγματα: $|\,hello\,| = 5$, $|\,e\,| = 0$.
- Μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ μπορεί να θεωρηθεί και σαν συνάρτηση

$$w : \{1, 2, \ldots, |\,w\,|\} \to \Sigma$$

Παράδειγμα: Αν $w = accordion$ τότε $w(1) = a$, $w(2) = w(3) = c$, $w(8) = w(4) = o$.

Παράθεση συμβολοσειρών

- **Συμβολισμός:** $x \circ y$ or xy
- **Ορισμός:** $w = x \circ y$ ανν $|\,w\,| = |\,x\,| + |\,y\,|$, $w(j) = x(j)$ για $j = 1, \ldots, |\,x\,|$ και $w(|\,x\,| + j) = y(j)$ για $j = 1, \ldots, |\,y\,|$.
- **Παράδειγμα:** $hello \circ mary = hellomary$
- **Ιδιότητες:** $(wx)y = w(xy)$ και $xe = ex = x$
- **Ορισμός:** Για κάθε φυσικό αριθμό i, η συμβολοσειρά w^i ορίζεται ως εξής:

$$w^0 = e$$
$$w^{i+1} = w^i w, \quad \text{για κάθε} \quad i \geq 0$$

Υποσυμβολοσειρά, κατάληξη και πρόθεμα συμβολοσειρών

- **Ορισμός:** u είναι **υποσυμβολοσειρά** της w ανν $(\exists x, y)(w = xuy)$.
- **Ορισμός:** u είναι **κατάληξη** της w ανν $(\exists x)(w = xu)$.
- **Ορισμός:** u είναι **πρόθεμα** της w ανν $(\exists y)(w = uy)$.
- **Παραδείγματα:** Η λέξη *road* είναι πρόθεμα της *roadrunner*, κατάληξη της *abroad* και υπολέξη και των δύο αυτών και της *beroader*.

Αντίστροφη συμβολοσειρά

- **Συμβολισμός:** x^R για συμβολοσειρά x.
- **Ορισμός:** (με επαγωγή)
  - Αν w είναι συμβολοσειρά μήκους 0, τότε $w^R = w = e$.
  - Αν w είναι συμβολοσειρά μήκους $n + 1 > 0$, τότε $w = ua$ για κάποιο $a \in \Sigma$ και $w^R = au^R$
- **Άσκηση:** Αποδείξτε ότι για όλες τις συμβολοσειρές w και x, $(wx)^R = x^R w^R$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε επαγωγή ως προς το μήκος της x).

Γλώσσες

- Μια **(τυπική) γλώσσα** με αλφάβητο Σ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου Σ^*.
- Μια γλώσσα μπορεί να είναι άπειρη ή πεπερασμένη.
- Στη θεωρία υπολογισμού χρησιμοποιούμε γλώσσες για να κωδικοποιούμε προβλήματα.
- **Ερώτηση:** Ποιά γλώσσα θα χρησιμοποιούσατε για να παραστήσετε ένα πρόβλημα χρωματισμού ενός γράφου;
- **Ορισμός:** Η ολοκλήρωση ή Kleene Star μίας γλώσσας L, συμβολίζεται με L^*, είναι το σύνολο όλων των λέξεων που προκύπτουν από τη σύζευξη μηδέν ή περισσοτέρων λέξεων της L. Δηλαδή:
  - $L^* = \{w \in \Sigma^* : w = w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_k$ για κάποιο $k \geq 0$ και κάποια $w_1, w_2, \ldots, w_k \in L\}$.
- **Παράδειγμα:** Αν $L = \{01, 1, 100\}$ τότε $110001110011 \in L^*$.

Κανονικές εκφράσεις

- **Ορισμός:** Οι **κανονικές εκφράσεις** σ' ένα αλφάβητο Σ, είναι λέξεις του αλφάβητου $\Sigma \cup \{\ ),\ (,\ \emptyset,\ \cup,\ *\}$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:
  - $\emptyset$ και κάθε στοιχείο του Σ είναι κανονική έκφραση.
  - Αν α και β είναι κανονικές εκφράσεις, και η $(\alpha\beta)$ είναι επίσης.
  - Αν α και β είναι κανονικές εκφράσεις, και η $(\alpha \cup \beta)$ είναι επίσης.
  - Αν α είναι κανονική έκφραση, και η α^* είναι επίσης.
  - Τίποτα δεν είναι κανονική έκφραση εκτός και αν προκύπτει από τα παραπάνω.
- Κάθε **κανονική έκφραση** αντιπροσωπεύει μία **γλώσσα** αν μεταφράσουμε τα σύμβολα $\cup$ και $*$ σαν ένωση και Kleene Star.

Μελέτη

- Κεφάλαιο 1 από το βιβλίο:
  Harry R. Lewis και Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας, 1992.