Ασκηση 1 Να κατασκευαστούν πεπερασμένα αυτόματα τα οποία να αναγνωρίζουν τις εξής γλώσσες:

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ η w περιέχει περιττό αριθμό από a και άρτιο αριθμό από b $\}$.

Ασκηση 2 Να δείξετε με κατάλληλο παράδειγμα ότι τα μη αιτιοκρατικά πεπερασμένα αυτόματα (non deterministic finite automata) δεν είναι κλειστά ως προς την πράξη του συνολοθεωρητικού συμπληρώματος.

Ασκηση 3 Οι υπολογιστικοί μηχανισμοί που είδαμε επιτρέπουν την ύπαρξη άχρηστων καταστάσεων, δηλ. καταστάσεις οι οποίες μπορεί να μην χρησιμοποιούνται, δηλ. να μην υπάρχουν υπολογισμοί οι οποίοι τις χρησιμοποιούν (τις επισκέπτονται). Ορίζουμε τις γλώσσες

$U_{DFA} = \{< M >\mid$ Το M είναι πεπερασμένο αυτόματο και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$,
$U_{PDA} = \{< M >\mid$ Το M είναι αυτόματο στοίβας και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$,
$U_{TM} = \{< M >\mid$ Η M είναι μηχανή Turing και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$.

Να δείξετε ότι οι γλώσσες U_{DFA}, U_{PDA} είναι αποφασίσιμες, και ότι η γλώσσα U_{TM} δεν είναι αποφασίσιμη.

Ασκηση 4 Ορίζουμε $\Sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$, δηλ. το σύνολο Σ_2 αποτελείται από τους πίνακες με δύο γραμμές και μία στήλη οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία 0, 1. Μία συμβολοσειρά από στοιχεία του Σ_2 παριστάνει δύο γραμμές αποτελούμενες από $0, 1$. Ερμηνεύουμε κάθε γραμμή σαν δυαδικό αριθμό και ορίζουμε την γλώσσα

$B = \{w \in \Sigma_2 \mid$ η δεύτερη γραμμή της w είναι το διπλάσιο της πρώτης γραμμής $\}$.

Για παράδειγμα $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in B$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \notin B$.

Δείξτε ότι η γλώσσα B είναι κανονική.

Ασκηση 5 Για δύο συμβολοσειρές x, y και μια γλώσσα L από ένα αλφάβητο Σ ορίζουμε ότι οι x, y δεν διακρίνονται από την L αν και μόνο αν για κάθε $w \in L$ είτε xw και yw ανήκουν στην L, είτε xw και yw δεν ανήκουν στην L. Αν οι x, y δεν διακρίνονται από την L το συμβολίζουμε με $x \equiv_L y$. Να δείξετε ότι η σχέση $\equiv_L$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

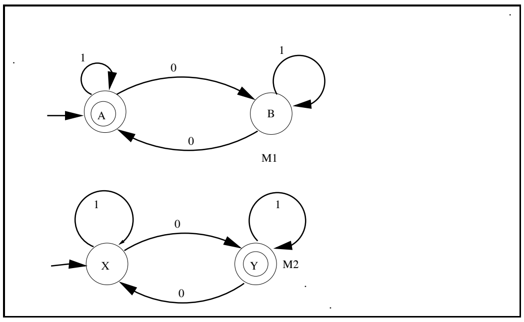
Ασκηση 6 Για την γλώσσα

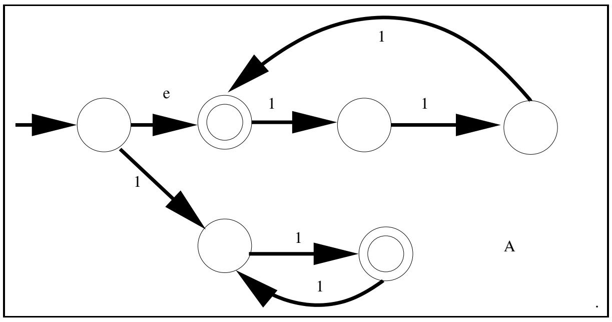
$$L = \{w \mid \text{η } w \text{ περιέχει ίσο αριθμό εμφανίσεων των συμβολοσειρών } 01 \text{ και } 10\ \} \subseteq \{0,1\}^*$$

να αποδείξετε ότι η γλώσσα L είναι κανονική γλώσσα.

Ασκηση 7 Αποδείξτε ότι η γλώσσα $L = \{0^m 1^n \mid m \neq n\}$ δεν είναι κανονική.

Ασκηση 8 Για τα αυτόματα τα οποία ακολουθούν να δοθούν οι κανονικές εκφράσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε αυτά.





Ασκηση 9 Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας είτε γραμματικές ανεξάρτητες συμφραζομένων ώστε να αναγνωρίζουν τις εξής γλώσσες:
1) $\{a^m b^n \mid m \leq n \leq 2m\}$,
2) $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$,
3) το συμπληρωμα της γλώσσας $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
4) $\{w\#z \mid$ w^r είναι υποσυμβολοσειρά της $z\}$

Ασκηση 10 Να ταξινομήσετε τα σύνολα των κανονικών γλωσσών, των γλωσσών ανεξαρτήτων συμφραζομένων, των αποφασίσιμων γλωσσών και των αναδρομικά αριθμήσιμων γλωσσών, ως προς την σχέση *είναι υποσύνολο* . Όπου έχουμε σχέση γνήσιου υποσύνολου να δώσετε ενα παράδειγμα.

Ασκηση 11 Για το αλφάβητο $\Sigma = \{a, b, c\}$, δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{w \mid \text{ η } w \text{ περιέχει ίσο αριθμό εμφανίσεων των } a,\ b,\ c\ \}$$

δεν είναι γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων.
Υπόδ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι η τομή μία γλώσσα ανεξάρτητης συμφραζομένων και μίας κανονικής γλώσσας είναι γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Ασκηση 12 Δείξτε ότι η γλώσσα $\{a^n\#a^{2n}\#a^{3n}\}$ δεν είναι ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Ασκηση 13 Για την γλώσσα

$$L = \{< R, S > \mid \text{ οι } R,\ S \text{ είναι κανονικές εκφράσεις και } L(R) \subseteq L(S)\ \}$$

δείξτε ότι είναι αποφασίσιμη.

Ασκηση 14 1) Μία γραμματική ονομάζεται δεξιά γραμμική είτε κανονική αν κάθε παραγωγή αποτελείται από μία συμβολοσειρά τερματικών ακολουθούμενη από το πολύ ένα τερματικό. Για την γραμματική

$$V = (a, b, A, B, S), \Sigma = \{a, b\},$$
$$R = (S \to abA, S \to B, S \to baB, S \to e, A \to bS, B \to aS, A \to b)$$

να κατασκευάσετε ένα μη αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο M ώστε $L(G) = L(M)$. Να δώσετε τις μεταβάσεις του M που παράγουν την συμβολοσειρά $abba$.

2) Να δείξετε ότι μία γλώσσα L είναι κανονική αν και μόνο αν υπάρχει κανονική γραμματική G η οποία παράγει την L.
Υποδ. Δείτε το παρ. 3.1.5 του βιβλίου.

Ασκηση 15 Για μια γραμματική G χωρίς συμφραζόμενα υποθέτουμε ότι κάθε κανόνας είναι της μορφής $A \to wB$, είτε $A \to Bw$, είτε $A \to w$ $w \in \Sigma^*$, $A, B \in V \setminus \Sigma$. Δείξτε με παράδειγμα ότι η γραμματική δεν είναι κανονική.

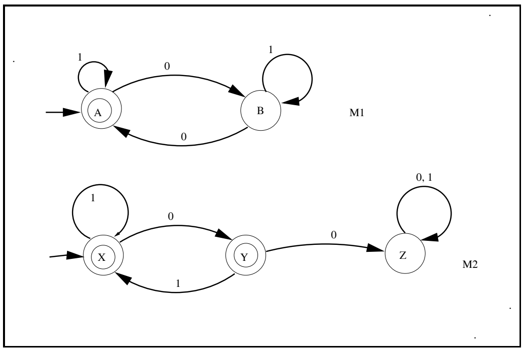
Ασκηση 16 α) Δείξτε ότι αν για μια γλώσσα $\Gamma \subseteq \{a\}^*$ αν το σύνολο $A = \{n \in N | a^n \in \Gamma\}$ είναι αριθμητική πρόοδος τότε η Γ είναι κανονική.

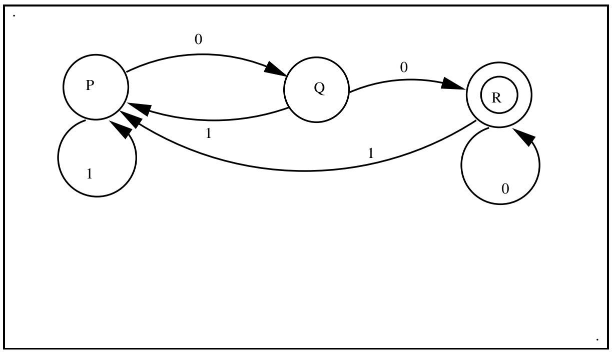
β) Δείξτε ότι αν για μια γλώσσα $\Gamma \subseteq \{a\}^*$ αν το σύνολο $A = \{n \in N | a^n \in \Gamma\}$ είναι ένωση πεπερασμένου αριθμού αριθμητικών προόδων τότε η Γ είναι κανονική.

Ασκηση 17 Αποδείξτε ότι η γλώσσα $\{a^n b a^m b a^{m+n} | m, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κανονική γλώσσα.

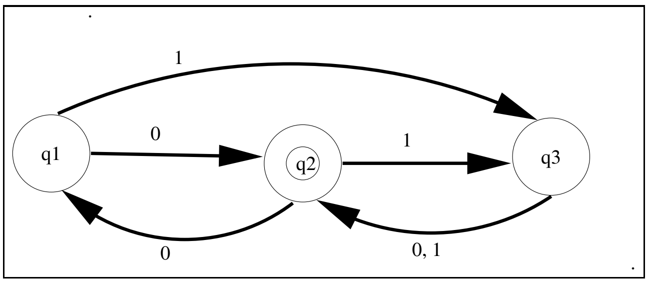
Ασκηση 18 Αν $L = \{a^i b^j c^i d^j | i, j > 0\}$. Να δείξετε ότι η L δεν είναι γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων.

Ασκηση 19 Δίνονται τρία αυτόματα (παραστάσεις σε γραφήματα ὑσκαριφήματα). Ζητάει να βρεθούν οι γλώσσες που αναγνωρίζουν, και να δοθούν αυτόματα που περιγράφουν τις γλώσσες $L_1 \cup L_2$, $L_2 \cap L_3$, $L_1 \setminus L_3$, $L_2 \cup L_3$, $L_2 \setminus L_3$, L_1, L_3.





Ασκηση 20 Για το αυτόματο που ακολουθεί ακολουθώντας την μεθοδολογία του θεωρήματος 5.4 σελ. 115 να υπολογίσετε τις κανονικές εκφράσεις R_{ij}^k για $k = 0, 1, 2$. Δεν είναι ανάγκη να βρείτε την γλώσσα που αναγνωρίζει.



Ασκηση 21 Αν Σ, Δ είναι δύο αλφάβητα και h μία συνάρτηση από το Σ στο Δ^*, επεκτείνουμε την h από το Σ^* στο Δ^* με τον αναδρομικό ορισμό

$$h(e) = e, \quad h(ax) = h(a)h(x), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma.$$

Η συνάρτηση h ονομάζεται ομομορφισμός.

Για μία γλώσσα L ορίζουμε $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$.

1. Αν η $L \subseteq \Sigma^*$ είναι κανονική κατασκευάστε ένα αυτόματο για την $h(L)$.
2. Αν $L \subseteq \Delta^*$ κατασκευάστε αυτόματο M το οποίο αναγνωρίζει την $h^{-1}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid h(y) \in L\}$.

Ασκηση 22 Δίνεται η γραμματική $S- > aB|bA,\ A- > aS|bAA|a,\ B- > bS|aBB|b$. στο αλφάβητο a, b. Να δειχθεί ότι οι συμβολοσειρές της γλώσσας που παράγεται από την γραμματική αυτή έχουν ίσο αριθμό εμφανίσεων των συμβόλων a και b.

Ασκηση 23 Αν S, A, B, C είναι μη τερματικά σύμβολα, a, b, c τα τερματικά σύμβολα και S αρχικό σύμβολο περιγράψτε την γλώσσα που παράγει η κάθε μια γραμματική από τις ακόλουθες γραμματικές με συνολοθεωρητικό συμβολισμό είτε αλλιώς (πχ έκφραση στα Ελληνικά).

$$\{S- > aA, S- > aS, A- > ab\}, \quad \{S- > abS, S- > aA, A- > a\},$$
$$\{S- > aSA, S- > aB, A- > b, B- > c\}, \quad \{S- > Sa, S- > AB, A- > aA, A- > a, B- > b\}.$$

Ασκηση 24 Ορίζουμε $\Sigma_3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$, δηλ. Το σύνολο Σ_3 αποτελείται από τους πίνακες με τρείς γραμμές και μία στήλη οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία 0, 1. Μία συμβολοσειρά από στοιχεία του Σ_3 παριστάνει τρείς γραμμές αποτελούμενες από 0, 1. Ερμηνεύουμε κάθε γραμμή σαν δυαδικό αριθμό και ορίζουμε την γλώσσα

$$B = \{w \in \Sigma_3 \mid \text{ η τρίτη γραμμή της } w \text{ είναι το άθροισμα των δύο άλλων γραμμών } \}.$$

Για παράδειγμα $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in B$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin B$. Δείξτε ότι η γλώσσα B είναι κανονική.

Υπόδειξη: Στην πρόσθεση (στο δυαδικό είτε στο δεκαδικό) χρειάζεται να γνωρίζουμε το κρατούμενο.

Ασκηση 25 Αν $\Sigma = \{+, =, 0, 1\}$, και

$$ADD = \{x = y+z\, midx, y, z \text{ είναι δυαδικοί ακέραιοι και ο } x \text{ είναι το άθροισμα των } y,\ z\ \},$$

δείξτε ότι η γλώσσα ADD δεν είναι κανονική.

Ασκηση 26 Δείξτε ότι το σύνολο των γλωσσών που είναι αποφασίσιμες είναι κλειστές ως προς τις πράξεις ένωση, παράθεση, κλειστότητα Kleene, συμπλήρωμα, τομή.

Ασκηση 27 Αν

$$A = \{< M >| \text{ το M είναι ένα πεπερασμένο αυτόματο το οποίο δεν δέχεται καμμία συμβολοσειρά η οποία περιέχει περιττό αριθμό από } 1\ \}.$$

Δείξτε ότι η γλώσσα A είναι αποφασίσιμη.

Ασκηση 28 Ορίζουμε ένα k αυτόματο στοίβας σαν ένα αυτόματο στοίβας με k στοιβες. Δηλ. ένα 0 αυτόματο στοίβας είναι ένα πεπερασμένο αυτόματο, ένα 1 αυτόματο στοίβας είναι ένα συνηθισμένο αυτόματο στοίβας. Δείξτε ότι ένα 2 αυτόματο στοίβας (έχει 2 στοίβες) είναι ισοδύναμε σε υπολογιστική ισχύ με μία μηχανή Turing.

Υπόδειξη: Προσομοιώστε την ταινία της μηχανής Turing.

Ασκηση 29 Οι υπολογιστικοί μηχανισμοί που είδαμε επιτρέπουν την ύπαρξη άχρηστων καταστάσεων, δηλ. καταστάσεις οι οποίες μπορεί να μην χρησιμοποιούνται, δηλ. να μην υπάρχουν υπολογισμοί οι οποίοι τις χρησιμοποιούν (τις επισκέπτονται). Ορίζουμε τις γλώσσες

$U_{DFA} = \{< M >|$ Το M είναι πεπερασμένο αυτόματο και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$,
$U_{PDA} = \{< M >|$ Το M είναι αυτόματο στοίβας και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$,
$U_{TM} = \{< M >|$ Η M είναι μηχανή Turing και έχει τουλάχιστον μία άχρηστη κατάσταση$\}$.

Να δείξετε ότι οι γλώσσες U_{DFA}, U_{PDA} είναι αποφασίσιμες, και ότι η γλώσσα U_{TM} δεν είναι αποφασίσιμη.