Κεφάλαιο 1

Δειγματικός Χώρος και Πιθανότητα

Περιεχόμενα

Η “πιθανότητα” είναι μία πολύ χρήσιμη έννοια, που μπορεί να ερμηνευτεί με διαφόρους τρόπους. Ας δούμε το εξής παράδειγμα.

> Ασθενής εισάγεται σε ένα νοσοκομείο και του χορηγείται ένα φάρμακο που σώζει ζωές. Ας παρακολουθήσουμε τώρα το διάλογο ανάμεσα σε ένα άμεσα ενδιαφερόμενο συγγενή του ασθενούς και μία νοσοκόμα.
>
> ΣΥΓΓΕΝΗΣ: Αδελφή, ποια είναι η πιθανότητα να δράσει το φάρμακο;
> ΝΟΣΟΚΟΜΑ: Ελπίζω ότι θα ενεργήσει. Θα ξέρω αύριο.
> ΣΥΓΓΕΝΗΣ: Ναι, αλλά πόσες είναι οι πιθανότητες να ενεργήσει;
> ΝΟΣΟΚΟΜΑ: Κάθε περίπτωση είναι διαφορετική, χρειάζεται να περιμένουμε.
> ΣΥΓΓΕΝΗΣ: Στους εκατό ασθενείς οι οποίοι νοσηλεύονται κάτω από παρόμοιες συνθήκες, πόσες φορές περιμένουμε να ενεργήσει;
> ΝΟΣΟΚΟΜΑ (λίγο ενοχλημένη): Σας είπα, κάθε άτομο είναι διαφορετικό, για κάποιο δουλεύει, για κάποιο δε δουλεύει.
> ΣΥΓΓΕΝΗΣ (επιμένοντας): Τότε πείτε μου, αν είχατε να προβλέψετε, αν θα δουλέψει ή όχι, τι θα υποστηρίζατε;
> ΝΟΣΟΚΟΜΑ (χαμογελώντας προς στιγμή): Θα προέβλεπα ότι θα δουλέψει.
> ΣΥΓΓΕΝΗΣ (ανακουφισμένος προς στιγμή): Εντάξει, τώρα θα ήσασταν πρόθυμη να χάσετε δύο ευρώ εάν δεν δουλέψει και να κερδίσετε ένα ευρώ εάν δουλέψει;
> ΝΟΣΟΚΟΜΑ (χάνοντας την υπομονή της): Τι άρρωστη σκέψη! Με καθυστερείτε!

Στη συζήτηση αυτή, ο συγγενής προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την έννοια της πιθανότητας για να συζητήσει μία **αβέβαιη** κατάσταση. Η αρχική αντίδραση της νοσοκόμας, δείχνει ότι δεν συμμερίζονται και οι δύο ή δεν γίνεται ομοιόμορφα αντιληπτή, η σημασία της “πιθανότητας” και ο συγγενής προσπαθεί να την ξεκαθαρίσει. Η πρώτη προσπάθεια είναι να ορίσει την πιθανότητα σχετικά με τη **συχνότητα του συμβάντος**, σαν ένα ποσοστό επιτυχιών σε ένα σχετικά μεγάλο αριθμό παρόμοιων καταστάσεων. Μία τέτοια ερμηνεία, είναι συχνά φυσική. Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι ένα νόμισμα έρχεται γράμματα “με πιθανότητα 50%,” συνήθως εννοούμε “περίπου τις μισές φορές.” Αλλά και η νοσοκόμα μπορεί να μην κάνει εντελώς λάθος, όταν αρνείται να συζητήσει με τέτοιους όρους. Τι θα γινόταν εάν αυτό ήταν ένα πειραματικό φάρμακο και χορηγούνταν για πρώτη φορά στο συγκεκριμένο νοσοκομείο ή κατά την εμπειρία της νοσοκόμας;

Ενώ υπάρχουν πολλές καταστάσεις, για τις οποίες ή ερμηνεία της σχετικής συχνότητας είναι κατάλληλη, υπάρχουν άλλες για τις οποίες δεν είναι. Θεωρήστε, για παράδειγμα, έναν επιστήμονα που υποστηρίζει ότι η Ιλιάδα και η Οδύσσεια έχουν δημιουργηθεί από το ίδιο πρόσωπο με πιθανότητα 90%. Μία τέτοια εκτί-

μηση μας δίνει κάποια πληροφορία, αλλά όχι σχετικά με συχνότητες επειδή το αντικείμενο είναι ένα γεγονός που συνέβη μία και μόνη φορά. Κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι οι **υποκειμενικές πεποιθήσεις** δεν έχουν ενδιαφέρον, τουλάχιστον από μαθηματικής ή επιστημονικής άποψης. Ωστόσο, τα άτομα πρέπει συχνά να αποφασίζουν εν μέσω αβεβαιότητας και οι πεποιθήσεις τους μπορούν να αποτελέσουν μία συστηματική βάση για επιτυχείς ή τουλάχιστον συνεπείς αποφάσεις.

Μάλιστα, οι επιλογές και οι πράξεις ενός λογικού ατόμου, μπορεί να αποκαλύψουν πολλά για τις υποκειμενικές πεποιθήσεις τους, ακόμη και αν δεν εκφράζονται με τη γλώσσα των πιθανοτήτων. Πράγματι, το τελευταίο μέρος του προηγούμενου διαλόγου αποτέλεσε μία προσπάθεια να συμπεράνουμε, με έμμεσο τρόπο, τι πιστεύει η νοσοκόμα. Εάν αυτή ήταν έτοιμη να αποδεχθεί το ένα-προς-ένα στοίχημα ότι το φάρμακο θα δούλευε, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι εκτιμά την πιθανότητα επιτυχίας σε τουλάχιστον 50%. Και αν η νοσοκόμα δεχόταν το στοίχημα που της προτάθηκε (δύο-προς-ένα), αυτό θα έδειχνε μία πιθανότητα επιτυχίας τουλάχιστον 2/3.

Αντί να φιλοσοφούμε επί μακρόν για την καταλληλότητα της λογικής των πιθανοτήτων, θα θεωρούμε ως δεδομένο ότι η θεωρία των πιθανοτήτων είναι χρήσιμη σε πολλά πλαίσια, συμπεριλαμβανομένων και μερικών όπου οι υποτιθέμενες πιθανότητες αντανακλούν μόνο υποκειμενικές πεποιθήσεις. Υπάρχουν πολλές επιτυχείς εφαρμογές στην επιστήμη, μηχανική, ιατρική, διοίκηση επιχειρήσεων, κτλ., και με βάση αυτή την εμπειρία, η θεωρία των πιθανοτήτων είναι εξαιρετικά χρήσιμη.

Το κυρίως αντικείμενο στο βιβλίο αυτό είναι η τεχνική του να περιγράφουμε την αβεβαιότητα κάνοντας χρήση μοντέλων πιθανοτήτων. Το πρώτο βήμα, που είναι το αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού, είναι η περιγραφή των γενικών δομών και βασικών μαθηματικών ιδιοτήτων τους. Τα μοντέλα που θεωρούμε, καθορίζουν πιθανότητες συλλογών (συνόλων) δυνατών αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό αρχίζουμε με μία σύντομη επισκόπηση της θεωρίας συνόλων.

1.1 ΣΥΝΟΛΑ

Η θεωρία πιθανοτήτων κάνει εκτεταμένη χρήση συνόλων και μαθηματικών πράξεων μεταξύ συνόλων, επομένως κατ' αρχάς θα εισάγουμε τη σχετική ορολογία και συμβολισμούς.

Ένα **σύνολο** είναι μία συλλογή αντικειμένων, τα οποία είναι **στοιχεία** του συνόλου. Εάν S είναι ένα σύνολο και x είναι ένα στοιχείο του S, γράφουμε $x \in S$. Εάν το x δεν είναι στοιχείο του S, γράφουμε $x \notin S$. Ένα σύνολο μπορεί να μην έχει στοιχεία και στην περίπτωση αυτή το αποκαλούμε **κενό σύνολο** και

το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

Τα σύνολα μπορούν να προσδιοριστούν με διάφορους τρόπους. Εάν το S περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, ας πούμε $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τα γράφουμε ως μία λίστα στοιχείων, ανάμεσα σε αγκύλες:

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Για παράδειγμα, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης ενός ζαριού είναι $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, και το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης ενός νομίσματος είναι $\{K, \Gamma\}$, όπου K σημαίνει "κορώνα" και Γ σημαίνει "γράμματα".

Εάν το S περιέχει ένα άπειρο πλήθος στοιχείων $x_1, x_2, \ldots$, τα οποία μπορούν να απαριθμηθούν σε μία λίστα (έτσι ώστε να υπάρχουν τόσα στοιχεία όσα και οι θετικοί ακέραιοι) γράφουμε

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

και λέμε ότι το S είναι **αριθμήσιμα άπειρο**. Για παράδειγμα, το σύνολο των άρτιων αριθμών μπορεί να γραφεί ως $\{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$ και είναι αριθμήσιμα άπειρο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο όλων των τιμών του x οι οποίες έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα P και να το γράψουμε ως

$$\{x \mid x \text{ ικανοποιεί την } P\}.$$

(Το σύμβολο "$|$" διαβάζεται "έτσι ώστε"). Για παράδειγμα, το σύνολο των άρτιων αριθμών γράφεται ως $\{k \mid k/2 \text{ είναι ακέραιος}\}$. Παρομοίως, το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x στο διάστημα $[0, 1]$ μπορεί να γραφεί ως $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία x του τελευταίου συνόλου παίρνουν ένα συνεχές πεδίο τιμών και δεν μπορούν να καταγραφούν σε μία λίστα (μία απόδειξη δίνεται στα προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου)! Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται **μη αριθμήσιμο**.

Εάν κάθε στοιχείο ενός συνόλου S είναι επίσης στοιχείο ενός συνόλου T, λέμε ότι το S είναι **υποσύνολο** του T και το γράφουμε ως $S \subset T$ ή $T \supset S$. Εάν $S \subset T$ και $T \subset S$, τα δύο σύνολα είναι **ίσα** και γράφουμε $S = T$. Επίσης, είναι χρήσιμο να εισάγουμε το **καθολικό σύνολο**, το οποίο συμβολίζεται με Ω και περιέχει όλα τα αντικείμενα τα οποία έχουν ενδιαφέρον σε συγκεκριμένο περιεχόμενο. Αφού προσδιορίσουμε το καθολικό σύνολο Ω, θεωρούμε μόνο σύνολα S τα οποία είναι υποσύνολα του Ω.

Πράξεις με Σύνολα

Δεδομένου του καθολικού συνόλου Ω, το **συμπληρωματικό** ενός συνόλου S είναι το σύνολο $\{x \in \Omega \,|\, x \notin S\}$ όλων των στοιχείων του Ω τα οποία δεν ανήκουν στο S και συμβολίζεται με S^c. Παρατηρήστε ότι $\Omega^c = \emptyset$.

Η **ένωση** δύο συνόλων S και T είναι το σύνολο όλων των στοιχείων τα οποία ανήκουν στο S ή στο T (ή και στα δύο) και δηλώνεται ως $S \cup T$. Η **τομή** δύο συνόλων S και T είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα μαζί, S και T, και δηλώνεται ως $S \cap T$. Επομένως,

$$S \cup T = \{x \,|\, x \in S \text{ ή } x \in T\},$$

και

$$S \cap T = \{x \,|\, x \in S \text{ και } x \in T\}.$$

Σε μερικές περιπτώσεις, θα θεωρήσουμε την ένωση ή την τομή μερικών και ακόμα απείρως πολλών συνόλων. Για παράδειγμα, εάν για κάθε ακέραιο θετικό αριθμό n, μας δίνεται το σύνολο S_n, χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cup S_2 \cup \cdots = \{x \,|\, x \in S_n \text{ για κάποιο } n\},$$

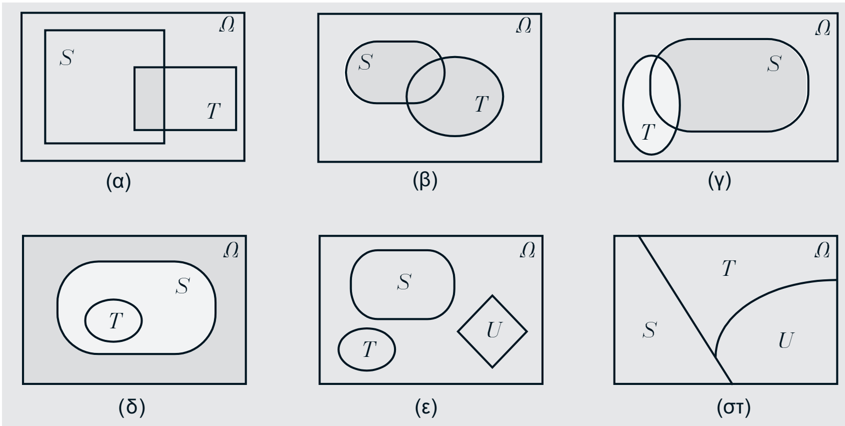
και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cap S_2 \cap \cdots = \{x \,|\, x \in S_n \text{ για όλα τα } n\}.$$

Δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους εάν η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Πιο γενικά, μερικά σύνολα λέγονται ότι είναι **ξένα** μεταξύ τους εάν οποιαδήποτε δύο από αυτά δεν έχουν κοινό στοιχείο. Μία συλλογή από σύνολα λέγεται ότι είναι μία **διαμέριση** ενός συνόλου S εάν τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το S.

Εάν x και y είναι δύο αντικείμενα, χρησιμοποιούμε το (x, y) για να δηλώσουμε το **διατεταγμένο ζεύγος** των x και y. Το σύνολο των βαθμωτών (πραγματικών αριθμών) δηλώνεται με $\Re$. Το σύνολο των ζευγών (ή τριάδων) βαθμωτών, δηλαδή, το διδιάστατο επίπεδο (ή ο τρισδιάστατος χώρος, αντίστοιχα) δηλώνεται με $\Re^2$ (ή $\Re^3$, αντίστοιχα).

Σύνολα και οι σχετικές πράξεις μεταξύ τους μπορούν να απεικονιστούν με τα **διαγράμματα Venn**, βλέπε Σχ. 1.1.



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα διαγραμμάτων Venn. (α) Η σκιασμένη περιοχή είναι $S \cap T$. (β) Η σκιασμένη περιοχή είναι $S \cup T$. (γ) Η σκιασμένη περιοχή είναι $S \cap T^c$. (δ) Εδώ, $T \subset S$. Η σκιασμένη περιοχή είναι το συμπλήρωμα του S. (ε) Τα σύνολα S, T και U είναι ξένα μεταξύ τους. (στ) Τα σύνολα S, T και U δημιουργούν μία διαμέριση του συνόλου Ω.

Άλγεβρα Συνόλων

Οι πράξεις με σύνολα έχουν αρκετές ιδιότητες που είναι στοιχειώδης συνέπειες των ορισμών τους. Μερικά παραδείγματα είναι:

$$\begin{aligned} S \cup T &= T \cup S, & S \cup (T \cup U) &= (S \cup T) \cup U, \\ S \cap (T \cup U) &= (S \cap T) \cup (S \cap U), & S \cup (T \cap U) &= (S \cup T) \cap (S \cup U), \\ (S^c)^c &= S, & S \cap S^c &= \emptyset, \\ S \cup \Omega &= \Omega, & S \cap \Omega &= S. \end{aligned}$$

Δύο ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες είναι **οι νόμοι του De Morgan:**

$$\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c, \qquad \left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c.$$

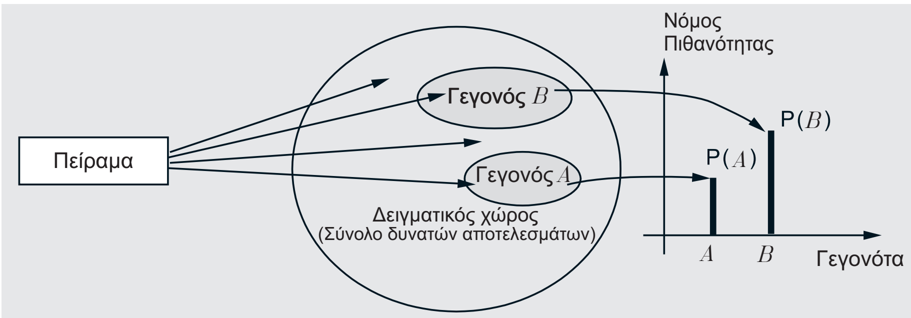
Για να αποδείξουμε τον πρώτο νόμο, θεωρήστε ότι $x \in (\cup_n S_n)^c$. Τότε, $x \notin \cup_n S_n$, το οποίο συνεπάγεται ότι για κάθε n, έχουμε $x \notin S_n$. Επομένως, $x \in S_n^c$ για κάθε n και $x \in \cap_n S_n^c$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(\cup_n S_n)^c \subset \cap_n S_n^c$. Η αντίστροφη πρόταση αποδεικνύεται αντιστρέφοντας το παραπάνω επιχείρημα, και έπεται ο πρώτος νόμος. Το επιχείρημα για το δεύτερο νόμο είναι παρόμοιο.

1.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ένα μοντέλο πιθανότητας είναι μία μαθηματική περιγραφή μίας αβέβαιης κατάστασης. Πρέπει να είναι σύμφωνο με ένα θεμελιώδες πλαίσιο το οποίο συζητάμε στην παράγραφο αυτή. Τα δύο κύρια συστατικά του, καταγράφονται παρακάτω και αναπαριστάνονται στο Σχ. 1.2.

Στοιχεία ενός Μοντέλου Πιθανότητας

- Ο **δειγματικός χώρος** Ω, ο οποίος είναι το σύνολο όλων των δυνατών **αποτελεσμάτων** ενός πειράματος.
- Ο **νόμος πιθανότητας**, ο οποίος αναθέτει σε ένα σύνολο A δυνατών αποτελεσμάτων (το οποίο επίσης ονομάζεται **γεγονός**) ένα μη αρνητικό αριθμό $\mathrm{P}(A)$ (ο οποίος ονομάζεται η **πιθανότητα** του A) και ο οποίος κωδικοποιεί τη γνώση μας ή τα πιστεύω μας για τη συλλογική "πιθανοφάνεια" των στοιχείων του A. Ο νόμος πιθανότητας πρέπει να πληροί ορισμένες συνθήκες τις οποίες θα εισάγουμε σύντομα.



Σχήμα 1.2: Τα κύρια συστατικά ενός μοντέλου πιθανότητας.

Δειγματικοί Χώροι και Γεγονότα

Κάθε μοντέλο πιθανότητας αναφέρεται σε μία διαδικασία ονομαζόμενη **πείραμα**, που παράγει ακριβώς ένα από μερικά δυνατά **αποτελέσματα**. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ονομάζεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος και συμβολίζεται με Ω. Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου, δηλαδή, μία συλ-

λογή δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **γεγονός** ή **ενδεχόμενο.**[†] Δεν υπάρχει περιορισμός στο τι αποτελεί ένα πείραμα. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι η ρίψη ενός νομίσματος είτε τριών νομισμάτων είτε μία άπειρη ακολουθία ρίψεων. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στη διαμόρφωση ενός μοντέλου πιθανότητας, υπάρχει μόνο ένα πείραμα. Άρα, τρεις ρίψεις ενός νομίσματος, αποτελούν ένα πείραμα και όχι τρία πειράματα.

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος μπορεί να αποτελείται από ένα πεπερασμένο ή ένα άπειρο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων. Πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι είναι από μαθηματικής και εννοιολογικής άποψης, πιο απλοί. Ωστόσο, οι δειγματικοί χώροι με άπειρο πλήθος στοιχείων είναι αρκετά κοινοί. Για παράδειγμα, θεωρήστε σαν πείραμα τη βολή ενός βέλους πάνω σε ένα τετραγωνικό στόχο και σαν αποτέλεσμα το σημείο της βολής.

Επιλογή ενός Κατάλληλου Δειγματικού Χώρου

Τα διάφορα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου, ασχέτως με το πλήθος τους, πρέπει να είναι διαφορετικά και **αμοιβαία αποκλειόμενα**, έτσι ώστε όταν ένα πείραμα εκτελείται να υπάρχει ένα μοναδικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, ο δειγματικός χώρος ο οποίος συνδέεται με τη ρίψη ενός ζαριού δεν μπορεί να περιέχει "1 ή 3" ως δυνατό αποτέλεσμα και επίσης "1 ή 4" ως ένα άλλο δυνατό αποτέλεσμα, επειδή δεν θα προέκυπτε ένα μοναδικό αποτέλεσμα όταν η ρίψη είναι 1.

Μία φυσική κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορους τρόπους και αυτό εξαρτάται από το είδος των ερωτήσεων που μας ενδιαφέρουν. Γενικά, ο δειγματικός χώρος που επιλέγεται για ένα μοντέλο πιθανότητας πρέπει να είναι **συλλογικά εξαντλητικός**, υπό την έννοια ότι οτιδήποτε συμβαίνει στο πείραμα, δίνει πάντα ένα αποτέλεσμα που έχει συμπεριληφθεί στο δειγματικό χώρο. Επιπλέον, ο δειγματικός χώρος θα πρέπει να είναι αρκετά λεπτομερής για να διακρίνονται μεταξύ τους τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν, ενώ πρέπει να αποφεύγονται λεπτομέρειες άνευ σημασίας.

Παράδειγμα 1.1. Θεωρήστε δύο εναλλακτικά παιχνίδια (και τα δύο περιέχουν δέκα διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος).:

*Παιχνίδι 1:*Παίρνουμε 1 ευρώ κάθε φορά που εμφανίζεται κορώνα.

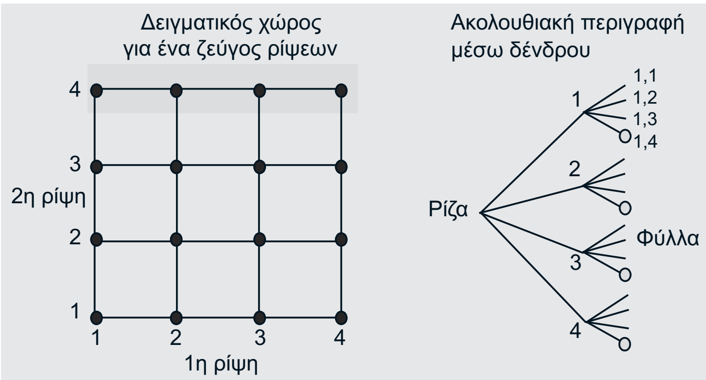
[†]Οποιαδήποτε συλλογή από δυνατά αποτελέσματα, συμπεριλαμβανομένου και ολόκληρου του δειγματικού χώρου Ω και του συμπληρωματικού του, το κενό σύνολο $\emptyset$, μπορεί να θεωρηθεί σαν γεγονός. Ωστόσο, σε ένα αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο, κάποια σύνολα πρέπει να αποκλειστούν. Πιο συγκεκριμένα, όταν έχουμε να κάνουμε με μοντέλα πιθανοτήτων που έχουν ένα μη αριθμήσιμα άπειρο δειγματικό χώρο, υπάρχουν κάποια ασυνήθη υποσύνολα στα οποία δεν μπορούμε να αναθέσουμε πιθανότητες. Αυτό είναι ένα λεπτό τεχνικό θέμα που αφορά στα μαθηματικά της θεωρίας μέτρου. Ευτυχώς, τέτοια παθολογικά υποσύνολα δεν προκύπτουν σε προβλήματα που θα θεωρήσουμε στο βιβλίο αυτό και το θέμα μπορεί να αγνοηθεί εκ του ασφαλούς.

Παιχνίδι 2: Παίρνουμε 1 ευρώ για κάθε ρίψη του νομίσματος, μέχρι και την πρώτη ρίψη που εμφανίζεται κορώνα. Τότε, παίρνουμε 2 ευρώ για κάθε ρίψη του νομίσματος, μέχρι τη δεύτερη φορά που θα εμφανιστεί κορώνα. Πιο γενικά, το ποσό των ευρώ ανά ρίψη διπλασιάζεται κάθε φορά που εμφανίζεται κορώνα.

Στο μοντέλο πιθανότητας για το παιχνίδι 1, μπορούμε να εργαστούμε με ένα δειγματικό χώρο που αποτελείται από 11 δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή, $0, 1, \ldots,$ 10. Στο παιχνίδι 2, μία λεπτομερής περιγραφή του προβλήματος είναι αναγκαία και πρέπει να έχουμε ένα δειγματικό χώρο που αποτελείται από κάθε δυνατή (μήκους 10), ακολουθία κορωνών και γραμμάτων.

Ακολουθιακά Μοντέλα

Πολλά πειράματα έχουν ακολουθιακό χαρακτήρα, όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές, η παρατήρηση των τιμών μίας μετοχής για πέντε συνεχόμενες μέρες, και η λήψη οκτώ συνεχών ψηφίων σε ένα δέκτη επικοινωνίας. Τότε, περιγράφουμε το πείραμα και τον αντίστοιχο δειγματικό χώρο μέσω μίας **ακολουθιακής περιγραφής της μορφής δένδρου**, όπως στο Σχ. 1.3.



Σχήμα 1.3: Δύο ισοδύναμες περιγραφές του δειγματικού χώρου ενός πειράματος που περιλαμβάνει δύο ρίψεις ενός 4-εδρου ζαριού. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (i, j), όπου i είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και j το αποτέλεσμα της δεύτερης. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να διαταχτούν σε ένα διδιάστατο πλέγμα όπως στην εικόνα στα αριστερά, ή μπορούν να περιγραφούν μέσω ενός δένδρου όπως στα δεξιά, πράγμα που αντανακλά τον ακολουθιακό χαρακτήρα του πειράματος. Εδώ, κάθε δυνατό αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε ένα φύλλο του δένδρου. Η σκιασμένη περιοχή στα αριστερά δείχνει το γεγονός $\{(1,4),\ (2,4),\ (3,4),\ (4,4)\}$ ότι το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης είναι 4. Αυτό το ίδιο γεγονός μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο φύλλων όπως φαίνεται στα δεξιά. Σημειώστε ότι κάθε κόμβος του δένδρου μπορεί να ταυτιστεί με ένα γεγονός,: το σύνολο όλων των φύλλων που ακολουθούν τον κόμβο. Για παράδειγμα, ο κόμβος 1 μπορεί να ταυτιστεί με το γεγονός $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ δηλαδή, το γεγονός ότι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι 1.

Νόμοι Πιθανοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταλήξει στο δειγματικό χώρο Ω ο οποίος σχετίζεται με ένα πείραμα. Τότε, για να ολοκληρώσουμε το μοντέλο πιθανότητας, πρέπει να εισάγουμε ένα **νόμο πιθανότητας**. Αυτός προσδιορίζει την "πιθανοφάνεια" οποιουδήποτε αποτελέσματος, ή οποιουδήποτε συνόλου δυνατών αποτελεσμάτων (ή γεγονότος, όπως το αποκαλέσαμε νωρίτερα). Πιο συγκεκριμένα, ο νόμος πιθανότητας αναθέτει σε κάθε γεγονός A, έναν αριθμό $\mathrm{P}(A)$, ο οποίος ονομάζεται **πιθανότητα** του A και ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα.

Τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων

1. **(Μη αρνητικότητα)** $\mathrm{P}(A) \geq 0$, για κάθε γεγονός A.
2. **(Προσθετικότητα)** Εάν A και B είναι δύο ξένα μεταξύ τους γεγονότα, τότε η πιθανότητα της ένωσης τους ικανοποιεί
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$
Γενικότερα, εάν ο δειγματικός χώρος, έχει ένα άπειρο πλήθος στοιχείων και $A_1, A_2, \ldots$ είναι μία ακολουθία από ξένα μεταξύ τους γεγονότα, τότε η πιθανότητα της ένωσης ικανοποιεί
$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots.$$
3. **(Κανονικοποίηση)** Η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με 1, δηλαδή $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Για να αναπαραστήσουμε το νόμο πιθανότητας, θεωρήστε μία μονάδα μάζας η οποία "απλώνεται" πάνω στο δειγματικό χώρο. Τότε, η $\mathrm{P}(A)$ είναι απλά η συνολική μάζα η οποία ανατέθηκε συλλογικά στα στοιχεία του A. Χρησιμοποιώντας αυτή την αναλογία, το αξίωμα της προσθετικότητας γίνεται αρκετά διαισθητικό: η συνολική μάζα μίας ακολουθίας γεγονότων ξένων μεταξύ τους, είναι το άθροισμα των ατομικών τους μαζών.

Μία πιο συγκεκριμένη ερμηνεία πιθανότητας αφορά στις σχετικές συχνότητες: μία δήλωση όπως $\mathrm{P}(A) = 2/3$ συχνά αναπαριστά μία πεποίθηση ότι το γεγονός A θα συμβεί στα δύο τρίτα ενός μεγάλου αριθμού επαναλήψεων του πειράματος. Τέτοια ερμηνεία, αν και όχι πάντα κατάλληλη, μπορεί πολλές φορές να διευκολύνει την διαισθητική μας αντίληψη. Θα την ξαναεπισκεφτούμε στο κεφάλαιο 7, σε σχέση με οριακά θεωρήματα.

Υπάρχουν πολλές φυσικές ιδιότητες ενός νόμου πιθανότητας, οι οποίες δεν

έχουν συμπεριληφθεί στα παραπάνω αξιώματα, για τον απλό λόγο ότι μπορούν να **αποδειχθούν**. Για παράδειγμα, σημειώστε ότι από τα αξιώματα της προσθετικότητας και της κανονικοποίησης συνεπάγεται ότι

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathrm{P}(\Omega) + \mathrm{P}(\emptyset) = 1 + \mathrm{P}(\emptyset),$$

και αυτό δείχνει ότι η πιθανότητα του κενού γεγονότος είναι 0:

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0.$$

Σαν ένα άλλο παράδειγμα, θεωρήστε τρία σύνολα ξένα μεταξύ τους A_1, A_2, και A_3. Από το αξίωμα της προσθετικότητας για δύο ξένα μεταξύ τους γεγονότα, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathrm{P}(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2 \cup A_3) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3).\end{aligned}$$

Αν προχωρήσουμε με τον ίδιο τρόπο, έχουμε ότι η πιθανότητα της ένωσης πεπερασμένου αριθμού γεγονότων ξένων μεταξύ τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων αυτών. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε περισσότερες, τέτοιου είδους, ιδιότητες.

Διακριτά Μοντέλα

Δείχνουμε με ένα παράδειγμα πώς θα κατασκευάσουμε ένα νόμο πιθανότητας αρχίζοντας από υποθέσεις κοινής λογικής σχετικές με το μοντέλο.

Παράδειγμα 1.2. Θεωρήστε ένα πείραμα το οποίο περιλαμβάνει μία ρίψη ενός νομίσματος. Υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα, κορώνα (K) και γράμματα (Γ). Ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{K, \Gamma\}$ και τα γεγονότα είναι

$$\{K, \Gamma\},\ \{K\},\ \{\Gamma\},\ \emptyset.$$

Εάν το νόμισμα είναι αμερόληπτο, δηλαδή, εάν πιστεύουμε ότι κορώνα και γράμματα είναι "ισοπίθανα", θα πρέπει να αναθέσουμε ίσες πιθανότητες στα δύο δυνατά αποτελέσματα και να προσδιορίσουμε ότι $\mathrm{P}(\{K\}) = \mathrm{P}(\{\Gamma\}) = 0.5$. Από το αξίωμα της προσθετικότητας συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{P}\big(\{K, \Gamma\}\big) = \mathrm{P}\big(\{K\}\big) + \mathrm{P}\big(\{\Gamma\}\big) = 1,$$

το οποίο συμφωνεί με το αξίωμα της κανονικοποίησης. Επομένως, ο νόμος της πιθανότητας δίνεται από τις εξής πιθανότητες

$$\mathrm{P}\big(\{K, \Gamma\}\big) = 1, \qquad \mathrm{P}\big(\{K\}\big) = 0.5, \qquad \mathrm{P}\big(\{\Gamma\}\big) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(\emptyset) = 0,$$

και ικανοποιεί και τα τρία αξιώματα.

Θεωρήστε ένα άλλο παράδειγμα το οποίο αφορά τρεις ρίψεις ενός νομίσματος. Το αποτέλεσμα θα είναι τώρα η μήκους 3 ακολουθία από κορώνες και γράμματα. Ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Υποθέτουμε ότι κάθε δυνατό αποτέλεσμα έχει την ίδια πιθανότητα, ίση με 1/8. Ας κατασκευάσουμε ένα νόμο πιθανότητας ο οποίος ικανοποιεί και τα τρία αξιώματα. Θεωρήστε ως ένα παράδειγμα το γεγονός

$$A = \{\text{συμβαίνουν ακριβώς 2 κορώνες}\} = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την προσθετικότητα, η πιθανότητα του A είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχείων του:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}\big) &= \mathrm{P}\big(\{KK\Gamma\}\big) + \mathrm{P}\big(\{K\Gamma K\}\big) + \mathrm{P}\big(\{\Gamma KK\}\big) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Παρομοίως, η πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος είναι ίση με 1/8 επί τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων τα οποία περιέχονται στο γεγονός. Αυτό ορίζει ένα νόμο πιθανότητας ο οποίος ικανοποιεί τα τρία αξιώματα.

Αν χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της προσθετικότητας και αν γενικεύσουμε το σκεπτικό του προηγούμενου παραδείγματος, θα καταλήξουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Διακριτός Νόμος Πιθανοτήτων

Εάν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων, τότε ο νόμος πιθανότητας προσδιορίζεται από τις πιθανότητες των γεγονότων τα οποία αποτελούνται από ένα μοναδικό στοιχείο. Πιο συγκεκριμένα, η πιθανότητα κάθε γεγονότος $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχείων του:

$$\mathrm{P}(\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}) = \mathrm{P}(s_1) + \mathrm{P}(s_2) + \cdots + \mathrm{P}(s_n).$$

Παρατηρήστε ότι εδώ χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό $\mathrm{P}(s_i)$ για να δηλώσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος $\{s_i\}$, αντί του ακριβέστερου $\mathrm{P}(\{s_i\})$. Θα ακολουθήσουμε τη σύμβαση αυτή στο υπόλοιπο του βιβλίου.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι πιθανότητες $\mathrm{P}(s_1), \ldots, \mathrm{P}(s_n)$ είναι όλες ίσες (αναγκαστικά ίσες με $1/n$, λόγω του αξιώματος της κανονικοποίησης), συμπεραίνουμε το παρακάτω.

Διακριτός Ομοιόμορφος Νόμος Πιθανοτήτων

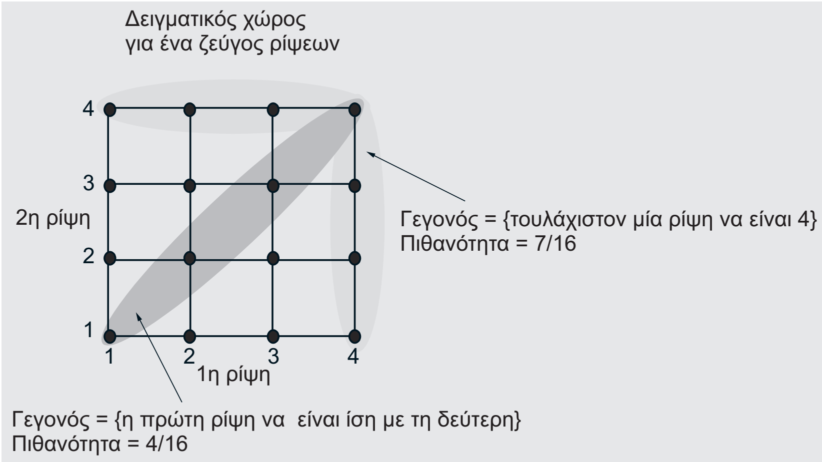
Εάν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από n δυνατά αποτελέσματα τα οποία έχουν την ίδια πιθανότητα (δηλαδή, όλα τα γεγονότα τα οποία έχουν ένα μοναδικό στοιχείο έχουν την ίδια πιθανότητα), τότε η πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος A είναι

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

Δίνουμε μερικά επιπλέον παραδείγματα δειγματικών χώρων και νόμου πιθανότητας.

Παράδειγμα 1.3. Θεωρήστε το πρόβλημα ρίψης ενός ζεύγους τετράεδρων ζαριών (βλ. Σχ. 1.4). Υποθέτουμε ότι τα ζάρια είναι αμερόληπτα και ερμηνεύουμε την υπόθεση αυτή να σημαίνει ότι καθένα από τα 16 δυνατά αποτελέσματα [ζεύγη (i, j), με $i, j = 1, 2, 3, 4$], έχει την ίδια πιθανότητα, ίση με 1/16. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος, πρέπει να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων του γεγονότος και να διαιρέσουμε δια 16 (το συνολικό αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων). Παραθέτουμε μερικές πιθανότητες γεγονότων οι οποίες υπολογίζονται με το τρόπο αυτό:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(\{\text{το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος}\}\big) &= 8/16 = 1/2,\\
\mathrm{P}\big(\{\text{το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιττός}\}\big) &= 8/16 = 1/2,\\
\mathrm{P}\big(\{\text{η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη}\}\big) &= 4/16 = 1/4,\\
\mathrm{P}\big(\{\text{η πρώτη ρίψη να είναι μεγαλύτερη από τη δεύτερη}\}\big) &= 6/16 = 3/8,\\
\mathrm{P}\big(\{\text{τουλάχιστον μία ρίψη να είναι ίση με 4}\}\big) &= 7/16.
\end{aligned}$$



Σχήμα 1.4: Διάφορα γεγονότα στο πείραμα ρίψης ενός 4-εδρου ζαριού και οι πιθανότητες τους, οι οποίες υπολογίστηκαν σύμφωνα με το διακριτό και ομοιόμορφο νόμο.

Συνεχή Μοντέλα

Τα μοντέλα πιθανοτήτων σε συνεχείς δειγματικούς χώρους διαφέρουν από τους αντίστοιχους διακριτούς, στο ότι οι πιθανότητες των γεγονότων που αποτελούνται από ένα μοναδικό αποτέλεσμα δεν είναι αρκετές για να χαρακτηρίσουν το νόμο πιθανότητας. Αυτό εξηγούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν και, επίσης, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο θα γενικεύσουμε τον ομοιόμορφο νόμο πιθανότητας, στην περίπτωση ενός συνεχούς δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 1.4. Ένας τροχός της τύχης βαθμονομείται συνεχώς από 0 μέχρι 1, ώστε τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος που αποτελείται από ένα μοναδικό γύρισμα είναι οι αριθμοί στο διάστημα $\Omega = [0, 1]$. Εάν υποθέσουμε έναν αμερόληπτο τροχό, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, αλλά ποια είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος το οποίο αποτελείται από ένα μοναδικό αποτέλεσμα; Δεν μπορεί να είναι θετική, γιατί τότε, χρησιμοποιώντας το αξίωμα της προσθετικότητας, έπεται ότι γεγονότα με αρκετά μεγάλο αριθμό στοιχείων έχουν πιθανότητα μεγαλύτερη του 1. Επομένως, η πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος που αποτελείται από ένα μοναδικό αποτέλεσμα, θα πρέπει να είναι ίση με 0.

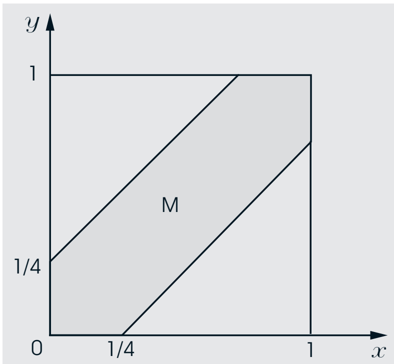
Στο παράδειγμα αυτό, έχει νόημα να αναθέσουμε πιθανότητα $b - a$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του $[0, 1]$ και να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός πιο περίπλοκου συνόλου με το να εκτιμήσουμε "το μήκος του".†Αυτή η ανάθεση ικα-

† Το "μήκος" ενός υποσυνόλου S του $[0, 1]$ είναι το ολοκλήρωμα $\int_S dt$, το οποίο ορίζεται, για "κανονικά" σύνολα S, με τη συνηθισμένη έννοια του απειροστικού λογισμού. Για ασυνήθη σύνολα το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να μην είναι καλώς ορισμένο από μαθηματικής άποψης, αλλά τέτοια προβλήματα ανήκουν σε μία πιο

νοποιεί τα τρία αξιώματα πιθανότητας και έχει τις κατάλληλες προϋποθέσεις για να είναι ένας αποδεκτός νόμος πιθανότητας.

Παράδειγμα 1.5. Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα έχουν ραντεβού κάποια συγκεκριμένη ώρα και ο καθένας τους θα φτάσει στο μέρος συνάντησης με καθυστέρηση από 0 μέχρι και 1 ώρα, με όλα τα ζεύγη καθυστέρησης να είναι ισοπίθανα. Ο πρώτος που φτάνει περιμένει 15 λεπτά και θα φύγει εάν ο άλλος δεν έχει φτάσει ακόμα. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν;

Θα χρησιμοποιήσουμε, ως δειγματικό χώρο το μοναδιαίο τετράγωνο, του οποίου τα στοιχεία είναι τα δυνατά ζεύγη καθυστέρησης και για τους δύο. Η ερμηνεία μας για τα "ισοπίθανα" ζεύγη καθυστέρησης είναι να επιτρέψουμε την πιθανότητα ενός υποσυνόλου του Ω να είναι ίσο με το εμβαδόν του. Αυτός ο νόμος πιθανότητας ικανοποιεί τα τρία αξιώματα. Το γεγονός ότι ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα θα συναντηθούν είναι η σκιασμένη περιοχή στο Σχ. 1.5 και η πιθανότητα της υπολογίζεται ίση με 7/16.



Σχήμα 1.5: Το γεγονός M (σκιασμένο στο σχήμα) ορίζεται ως "ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα θα φτάσουν μέσα σε 15 λεπτά ο ένας από τον άλλο" (βλ. Παράδειγμα 1.5) και δίνεται από τη σχέση

$$M = \Big\{(x, y) \;\Big|\; |x - y| \leq 1/4,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\Big\}.$$

Το εμβαδόν του M είναι 1 μείον το εμβαδόν των δύο μη σκιασμένων τριγώνων, ή $1 - (3/4) \cdot (3/4) = 7/16$. Άρα, η πιθανότητα συνάντησης είναι 7/16.

αυστηρή αντιμετώπιση του θέματος. Παρεπιπτόντως, το ότι είναι αποδεκτό να χρησιμοποιήσουμε το μήκος σαν νόμο πιθανότητας, εξαρτάται από το γεγονός ότι το μοναδιαίο διάστημα έχει ένα μη αριθμήσιμα άπειρο πλήθος στοιχείων. Πράγματι, εάν το μοναδιαίο διάστημα είχε ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, με κάθε στοιχείο να έχει πιθανότητα μηδέν, τότε από το αξίωμα της προσθετικότητας συνεπάγεται ότι ολόκληρο το διάστημα έχει πιθανότητα μηδέν, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το αξίωμα της κανονικοποίησης.

Ιδιότητες Νόμων Πιθανοτήτων

Οι νόμοι πιθανότητας έχουν αρκετές ιδιότητες, τις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε από τα αξιώματα. Μερικές από αυτές συνοψίζονται ακολούθως.

Μερικές Ιδιότητες Νόμων Πιθανοτήτων

Θεωρήστε ένα νόμο πιθανότητας και έστω ότι τα A, B, και C είναι γεγονότα.

(α) Εάν $A \subset B$, τότε $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(β) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(γ) $\mathrm{P}(A \cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

(δ) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C)$.

Οι ιδιότητες αυτές, και άλλες παρόμοιες, μπορούν να αναπαρασταθούν και να επαληθευτούν γραφικά με τη χρήση διαγραμμάτων Venn, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.6. Παρατηρήστε ότι η ιδιότητα (γ) μπορεί να γενικευτεί ως ακολούθως:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$

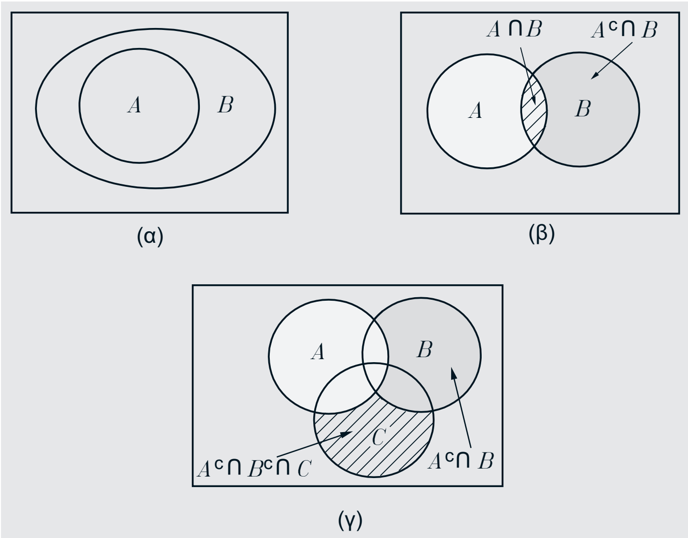
Για να το δούμε αυτό, εφαρμόζουμε την ιδιότητα (γ) στα σύνολα A_1 και $A_2 \cup \cdots \cup A_n$:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2 \cup \cdots \cup A_n).$$

Επίσης, εφαρμόζουμε την ιδιότητα (γ) στα σύνολα A_2 και $A_3 \cup \cdots \cup A_n$:

$$\mathrm{P}(A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3 \cup \cdots \cup A_n).$$

Συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο και τελικά προσθέτουμε.



Σχήμα 1.6: Αναπαράσταση και επαλήθευση νόμων πιθανότητας με τη χρήση διαγραμμάτων Venn. Εάν $A \subset B$, τότε το B είναι η ένωση δύο γεγονότων A και $A^c \cap B$ τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους· βλ. διάγραμμα (α). Επομένως, από το αξίωμα της προσθετικότητας, έχουμε

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B) \geq \mathrm{P}(A),$$

όπου η ανισότητα ακολουθεί από το αξίωμα της μη αρνητικότητας, επαληθεύοντας την ιδιότητα (α).

Από το διάγραμμα (β), μπορούμε να εκφράσουμε τα γεγονότα $A \cup B$ και B ως την ένωση γεγονότων ξένων μεταξύ τους:

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B), \qquad B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

Κάνοντας χρήση του αξιώματος της προσθετικότητας, έχουμε

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B), \qquad \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B).$$

Αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη ισότητα από την πρώτη και επαναδιατάξουμε τους όρους, έχουμε $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$, το οποίο επαληθεύει την ιδιότητα (β). Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0$ (το αξίωμα της μη αρνητικότητας), έχουμε $\mathrm{P}(A \cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, το οποίο επαληθεύει την ιδιότητα (γ).

Από το διάγραμμα (γ), βλέπουμε ότι το γεγονός $A \cup B \cup C$ μπορεί να εκφραστεί ως η ένωση τριών γεγονότων ξένων μεταξύ τους:

$$A \cup B \cup C = A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C),$$

άρα η ιδιότητα (δ) έπεται ως συνέπεια του αξιώματος της προσθετικότητας.

Μοντέλα και Πραγματικότητα

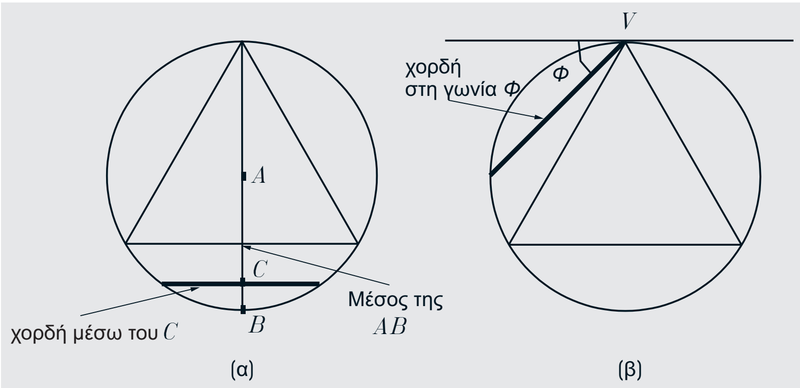
Το πλαίσιο της θεωρίας πιθανοτήτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσουμε την αβεβαιότητα σε μία μεγάλη ποικιλία φυσικών καταστάσεων. Συνήθως,

αυτό περιέχει δύο διαφορετικά στάδια.

(α) Στο πρώτο στάδιο, κατασκευάζουμε ένα μοντέλο πιθανότητας, με το να προσδιορίσουμε ένα νόμο πιθανότητας σε έναν κατάλληλα ορισμένο δειγματικό χώρο. Η βασική απαίτηση σε αυτό το βήμα είναι ότι ο νόμος πιθανότητας ανταποκρίνεται στα τρία αξιώματα. Λογικά άτομα ενδέχεται να διαφωνήσουν για το ποιο μοντέλο αντιπροσωπεύει καλύτερα την πραγματικότητα. Σε πολλές περιπτώσεις, κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το "λανθασμένο" μοντέλο, εάν είναι απλούστερο του "σωστού" ή μας επιτρέπει προσιτούς υπολογισμούς. Αυτό είναι συμβατό με κοινές πρακτικές στην επιστήμη και στη μηχανική, όπου η επιλογή ενός μοντέλου είναι ένας συμβιβασμός μεταξύ ακρίβειας, απλότητας και προσιτών υπολογισμών. Πολλές φορές, ένα μοντέλο επιλέγεται με βάση ιστορικά δεδομένα ή προηγούμενα αποτελέσματα παρόμοιων πειραμάτων, χρησιμοποιώντας μεθόδους από την επιστημονική περιοχή της **στατιστικής**.

(β) Στο δεύτερο στάδιο, το μοντέλο πιθανότητας είναι δεδομένο και υπολογίζουμε τις πιθανότητες ορισμένων γεγονότων, ή συμπεραίνουμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ενώ στο πρώτο στάδιο υπάρχει κάποια ελευθερία επιλογής στη σύνδεση του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά, το δεύτερο ελέγχεται από τους κανόνες της λογικής και των αξιωμάτων της πιθανότητας. Ενδέχεται να προκύψουν δυσκολίες με το δεύτερο εάν μερικοί υπολογισμοί είναι πολύπλοκοι ή ένας νόμος πιθανότητας έχει προσδιοριστεί με έμμεσο τρόπο. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει χώρος για ασάφειες: Όλες οι πιθανές ερωτήσεις έχουν ακριβείς απαντήσεις.

Η θεωρία των πιθανοτήτων είναι γεμάτη "παράδοξα", σύμφωνα με τα οποία διαφορετικές υπολογιστικές μέθοδοι φαίνεται να δίνουν διαφορετικές απαντήσεις, στο ίδιο ερώτημα. Συνήθως όμως, αυτές οι προφανείς ασυνέπειες οφείλονται στην προχειρότητα του προσδιορισμού του μοντέλου πιθανότητας. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι **το παράδοξο του Bertrand**, όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 1.7.



Σχήμα 1.7: Το παράδειγμα αυτό, το οποίο παρουσιάστηκε από τον L. F. Bertrand το 1889, καταδεικνύει την ανάγκη να προσδιοριστεί χωρίς ασάφειες ένα μοντέλο πιθανότητας. Θεωρήστε ένα κύκλο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο χαραγμένο μέσα στον κύκλο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήκος μίας χορδής του κύκλου ή οποία επιλέγεται τυχαία είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τριγώνου; Η απάντηση εδώ εξαρτάται από την ακριβή έννοια της "τυχαίας επιλογής". Οι δύο μέθοδοι οι οποίες αναπαριστάνονται στα μέρη (α) και (β) του σχήματος οδηγούν σε αντιφατικά αποτελέσματα.

Στο (α), παίρνουμε μία ακτίνα του κύκλου, όπως είναι η AB και επιλέγουμε ένα σημείο C πάνω στην ακτίνα, με όλα τα σημεία να είναι ισοπίθανα. Μετά σχεδιάζουμε τη χορδή μέσω του C η οποία είναι κάθετη στην AB. Η AB τέμνει το τρίγωνο στο μέσο σημείο της AB, άρα η πιθανότητα ότι το μήκος της χορδής είναι μεγαλύτερο από την πλευρά είναι 1/2.

Στο (β), παίρνουμε ένα σημείο πάνω στον κύκλο, όπως η κορυφή V, σχεδιάζουμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο V και σχεδιάζουμε μία ευθεία η οποία διέρχεται μέσω του V και δημιουργεί μία τυχαία γωνία Φ με την εφαπτομένη, με όλες τις γωνίες να είναι ισοπίθανες. Θεωρούμε τη χορδή την οποία έχουμε από την τομή της ευθείας αυτής και της γραμμής του κύκλου. Το μήκος της χορδής είναι μεγαλύτερο από το μήκος της πλευράς του τριγώνου εάν η Φ είναι μεταξύ $\pi/3$ και $2\pi/3$. Εφόσον η Φ παίρνει τιμές μεταξύ 0 και π, η πιθανότητα ότι το μήκος της χορδής είναι μεγαλύτερο από την πλευρά είναι 1/3.

Σύντομη Ιστορία της Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Προ Χριστού. Τα τυχερά παιγνίδια ήταν πολύ δημοφιλή στην Αρχαία Ελλάδα και τη Ρώμη, χωρίς ωστόσο να υπάρξει επιστημονική ανάπτυξη γύρω από το θέμα, πιθανόν διότι το σύστημα των αριθμών που χρησιμοποιείτο από τους Έλληνες, δε διευκόλυνε τις αλγεβρικές πράξεις. Η ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων χρειάστηκε να περιμένει την εξέλιξη του μοντέρνου αριθμητικού συστήματος των Ινδών και Αράβων, κατά τη διάρκεια του δευτέρου μισού της πρώτης χιλιετίας, όπως και την πληθώρα των επιστημονικών ιδεών που αναπτύχθηκαν κατά την Αναγέννηση.
- 16ος Αιώνας. Ο Girolamo Cardano, ένας γλαφυρός και αμφιλεγόμενος Ιτα-

λός μαθηματικός, εκδίδει σωστές μεθόδους για τον υπολογισμό πιθανοτήτων για τυχερά παιγνίδια όπως ζάρια και χαρτιά.

- 17ος Αιώνας. Μια αλληλογραφία μεταξύ του Fermat και του Pascal θέτει πολλά και ενδιαφέροντα ερωτήματα πιθανοτήτων και προωθεί σε περαιτέρω μελέτη του πεδίου.
- 18ος Αιώνας. Ο Jacob Bernoulli μελετά επαναλαμβανόμενες ρίψεις νομίσματος και εισάγει τον πρώτο νόμο των μεγάλων αριθμών, ο οποίος βάζει τα θεμέλια σύνδεσης θεωρητικών αποτελεσμάτων και εμπειρικών γεγονότων. Αρκετοί μαθηματικοί όπως οι Daniel Bernoulli, Leibniz, Bayes και Lagrange έχουν σημαντικές συνεισφορές στη θεωρία πιθανοτήτων και τη χρήση της στην ανάλυση πραγματικών φαινόμενων. Ο De Moivre εισάγει την κανονική κατανομή και αποδεικνύει την πρώτη μορφή του κεντρικού οριακού θεωρήματος.
- 19ος Αιώνας. Ο Laplace εκδίδει ένα βιβλίο που έχει μεγάλη επιρροή και θεμελιώνει τη σπουδαιότητα της θεωρίας πιθανοτήτων σαν ποσοτικό πεδίο. Περιλαμβάνει πολλές πρωτότυπες συνεισφορές, συμπεριλαμβανομένης μιας γενικής απόδειξης του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Ο Legendre και ο Gauss χρησιμοποιούν πιθανότητες σε προβλέψεις προβλημάτων αστρονομίας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων και ανοίγουν το δρόμο σε ένα μεγάλο πεδίο εφαρμογών. Ο Poisson εκδίδει ένα βιβλίο με πολλές πρωτότυπες συνεισφορές συμπεριλαμβανομένης και της κατανομής Poisson. Ο Chebyshev και οι μαθητές του Markov και Lyapunov μελετούν οριακά θεωρήματα και ανεβάζουν το επίπεδο μαθηματικής αυστηρότητας του πεδίου. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, η θεωρία πιθανοτήτων θεωρείται, ως επί το πλείστον, σαν φυσική επιστήμη με κύριο σκοπό της την εξήγηση φυσικών φαινόμενων. Κατά συνέπεια οι πιθανότητες ερμηνεύονται ως όρια σχετικών συχνοτήτων στην περίπτωση επαναλαμβανομένων πειραμάτων.
- 20ος Αιώνας. Η σχετική συχνότητα εγκαταλείπεται ως βασική έννοια, προς χάριν του αξιωματικού συστήματος, το οποίο χρησιμοποιείται σήμερα παγκοσμίως. Όπως συμβαίνει και σε άλλα μαθηματικά πεδία, η εξέλιξη της θεωρίας πιθανοτήτων μέσω των αξιωμάτων επαφίεται μόνο στη λογική ορθότητα, ανεξάρτητα από τη σχέση με φυσικά φαινόμενα. Παρόλα αυτά η θεωρία πιθανοτήτων, γενικά έχει εισχωρήσει στην επιστήμη και ειδικότερα στη μηχανική καθώς έχει την ικανότητα να περιγράφει και να ερμηνεύει τους περισσοτέρους τύπους φαινομένων αβεβαιότητας που προκύπτουν στην πράξη.

1.3 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η δεσμευμένη πιθανότητα μας παρέχει ένα τρόπο να συλλογιστούμε για το αποτέλεσμα ενός πειράματος, με βάση **επιμέρους πληροφορίες**. Μερικά παραδείγματα τέτοιων καταστάσεων:

(α) Σε ένα πείραμα που περιέχει δύο διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού, μας αναφέρεται ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι 9. Πόσο πιθανό είναι η πρώτη ρίψη να ήταν 6;

(β) Σε ένα παιχνίδι όπου μαντεύονται λέξεις, το πρώτο γράμμα μίας λέξης είναι "γ". Πόσο πιθανό είναι το δεύτερο γράμμα να είναι "κ";

(γ) Πόσο πιθανό είναι ένας άνθρωπος να είναι ασθενής δεδομένου ότι το ιατρικό τεστ ήταν αρνητικό;

(δ) Μία κουκίδα εμφανίζεται πάνω στην οθόνη ενός ραντάρ. Πόσο πιθανό είναι να αντιστοιχεί σε ένα αεροπλάνο;

Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου ενός πειράματος, του αντίστοιχου δειγματικού χώρου, και ενός νόμου πιθανότητας, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα είναι εντός κάποιου γεγονότος B. Επιθυμούμε να ποσοτικοποιήσουμε την πιθανότητα ότι το αποτέλεσμα αυτό ανήκει, επίσης, και σε κάποιο άλλο γεγονός A. Επομένως, επιδιώκουμε να οικοδομήσουμε ένα καινούριο νόμο πιθανότητας ο οποίος λαμβάνει υπ' όψη τη διαθέσιμη γνώση και ο οποίος, για οποιοδήποτε γεγονός A, μας δίνει τη **δεσμευμένη πιθανότητα του** A **δεδομένου του** B, και συμβολίζεται με $\mathrm{P}(A \,|\, B)$.

Θα θέλαμε η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ διαφορετικών γεγονότων A να αποτελεί έναν αποδεκτό νόμο πιθανότητας, ο οποίος ικανοποιεί τα αξιώματα. Οι δεσμευμένες πιθανότητες πρέπει, επίσης, να συμφωνούν με τη διαίσθηση μας για σημαντικές ειδικές περιπτώσεις, όπως όταν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος είναι το ίδιο πιθανά. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι και τα 6 δυνατά αποτελέσματα της ρίψης ενός ζαριού είναι ισοπίθανα. Εάν μας πληροφορήσουν ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός, μας απομένουν 3 δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή, 2, 4, και 6. Αυτά τα τρία αποτελέσματα είναι ισοπίθανα εξ αρχής, και θα πρέπει να παραμείνουν ισοπίθανα δεδομένης της επιμέρους γνώσης ότι το ενδεχόμενο είναι άρτιος. Επομένως, είναι λογικό να έχουμε

$$\mathrm{P}(\text{το αποτέλεσμα να είναι } 6 \,|\, \text{το αποτέλεσμα είναι άρτιος}) = \frac{1}{3}.$$

Το σκεπτικό αυτό συνιστά έναν ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας όταν όλα

τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα που δίνεται από την

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A \cap B}{\text{πλήθος στοιχείων του } B}.$$

Γενικεύοντας το επιχείρημα, εισάγουμε τον εξής ορισμό δεσμευμένης πιθανότητας:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

όπου $\mathrm{P}(B) > 0$· η δεσμευμένη πιθανότητα δεν ορίζεται, εάν το υπό δέσμευση γεγονός έχει μηδενική πιθανότητα. Με λόγια, από τη συνολική πιθανότητα των στοιχείων του B, η $\mathrm{P}(A \mid B)$ είναι το μέρος που αναλογεί στα δυνατά ενδεχόμενα που ανήκουν επίσης στο A.

Η Δεσμευμένη Πιθανότητα Προσδιορίζει ένα Νόμο Πιθανότητας

Για ένα συγκεκριμένο σύνολο B, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι δεσμευμένες πιθανότητες $\mathrm{P}(A \mid B)$ δημιουργούν ένα αποδεκτό νόμο πιθανοτήτων. Πράγματι, η μη αρνητικότητα είναι ξεκάθαρη. Επιπλέον,

$$\mathrm{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1,$$

άρα το αξίωμα της κανονικοποίησης επίσης ικανοποιείται. Το αξίωμα της προσθετικότητας για δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα A_1 και A_2 αποδεικνύεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) &= \frac{\mathrm{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap B) + \mathrm{P}(A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} + \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B),
\end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα $A_1 \cap B$ και $A_2 \cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα και το αξίωμα της προσθετικότητας για την (μη δεσμευμένη) πιθανότητα. Το επιχείρημα είναι παρόμοιο για μία αριθμήσιμη συλλογή ξένων μεταξύ τους συνόλων.

Εφόσον οι δεσμευμένες πιθανότητες αποτελούν ένα αποδεκτό νόμο πιθανότητας, ισχύουν όλες οι γενικές ιδιότητες των νόμων πιθανότητας. Για παράδειγμα, μία σχέση όπως $\mathrm{P}(A \cup C) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)$ μεταφράζεται σε μία καινούργια σχέση

$$\mathrm{P}(A \cup C \mid B) \leq \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(C \mid B).$$

Ας σημειωθεί, επίσης, ότι $\mathrm{P}(B \mid B) = \mathrm{P}(B)/\mathrm{P}(B) = 1$, ώστε όλη η δεσμευμένη πιθανότητα συγκεντρώνεται στο B. Επομένως, θα μπορούσαμε να καταργήσουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα εκτός B και να μεταχειριστούμε τις δεσμευμένες πιθανότητες ως νόμο πιθανότητας ορισμένο στο καινούριο καθολικό σύνολο B.

Ας συνοψίσουμε τα συμπεράσματα που έχουμε μέχρι τώρα.

Ιδιότητες Δεσμευμένης Πιθανότητας

- Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος A, δεδομένου ενός γεγονότος B με $\mathrm{P}(B) > 0$, ορίζεται ως

  $$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

  και προσδιορίζει έναν καινούργιο (υπό δέσμευση) νόμο πιθανότητας στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι ιδιότητες των νόμων πιθανότητας ισχύουν για τους υπό δέσμευση νόμους πιθανότητας.

- Οι δεσμευμένες πιθανότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ένας νόμος πιθανότητας στο καινούριο σύνολο B, επειδή όλη η δεσμευμένη πιθανότητα συγκεντρώνεται στο B.

- Στην περίπτωση που τα δυνατά αποτελέσματα είναι πεπερασμένα και ισοπίθανα, έχουμε

  $$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A \cap B}{\text{πλήθος στοιχείων του } B}.$$

Παράδειγμα 1.6. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα διαδοχικά τρεις φορές. Θέλουμε να βρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(A \mid B)$ όταν τα A και B είναι τα γεγονότα

$$A = \{\text{περισσότερες κορώνες από γράμματα}\}, \qquad B = \{\text{1η ρίψη είναι κορώνα}\}.$$

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από οκτώ ακολουθίες,

$$\Omega = \{KKK,\, KK\Gamma,\, K\Gamma K,\, K\Gamma\Gamma,\, \Gamma KK,\, \Gamma K\Gamma,\, \Gamma\Gamma K,\, \Gamma\Gamma\Gamma\},$$

τις οποίες θεωρούμε ισοπίθανες. Το γεγονός B αποτελείται από τέσσερα στοιχεία KKK, $KK\Gamma$, $K\Gamma K$, $K\Gamma\Gamma$, επομένως η πιθανότητα είναι

$$\mathrm{P}(B) = \frac{4}{8}.$$

Το γεγονός $A \cap B$ αποτελείται από τρία στοιχεία KKK, $KK\Gamma$, $K\Gamma K$, επομένως η πιθανότητα είναι

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Άρα, η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ είναι

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}.$$

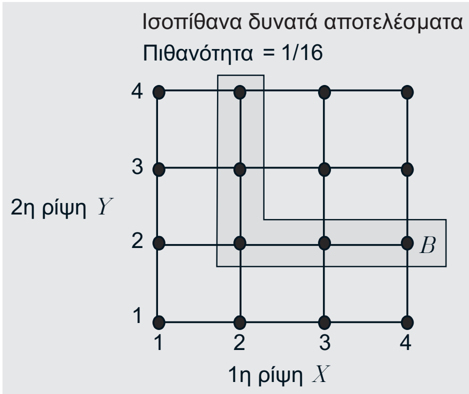
Επειδή όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ πιο σύντομα. Μπορούμε, να παρακάμψουμε τον υπολογισμό της $\mathrm{P}(B)$ και $\mathrm{P}(A \cap B)$ και απλώς να διαιρέσουμε το πλήθος των κοινών στοιχείων των A και B (που είναι 3) δια του πλήθους των στοιχείων του B (που είναι 4), για να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα 3/4.

Παράδειγμα 1.7. Ένα αμερόληπτο 4-εδρο ζάρι ρίχνεται δύο φορές και τα 16 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω ότι X και Y είναι το αποτέλεσμα της 1ης και 2ης ρίψης, αντίστοιχα. Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(A \,|\, B)$, όπου

$$A = \big\{\max(X, Y) = m\big\}, \qquad B = \big\{\min(X, Y) = 2\big\},$$

και το m παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε πρώτα να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(A \cap B)$ και $\mathrm{P}(B)$ μετρώντας το πλήθος των στοιχείων των $A \cap B$ και B, αντίστοιχα, και να το διαιρέσουμε δια του 16. Εναλλακτικά, μπορούμε απευθείας να διαιρέσουμε το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ δια του πλήθους των στοιχείων του B· βλ. Σχ. 1.8.



Σχήμα 1.8: Δειγματικός χώρος που περιλαμβάνει 2 ρίψεις ενός 4-εδρου ζαριού (βλ. Παράδειγμα 1.7). Το υπό δέσμευση γεγονός $B = \{\min(X,Y) = 2\}$ αποτελείται από τα 5 στοιχεία του σκιαγραφημένου συνόλου. Το σύνολο $A = \{\max(X,Y) = m\}$ μοιράζεται με το B δύο στοιχεία εάν $m = 3$ ή $m = 4$, ένα στοιχείο εάν $m = 2$, και κανένα στοιχείο εάν $m = 1$. Άρα, έχουμε

$$\mathrm{P}\big(\{\max(X,Y) = m\} \bigm| B\big) = \begin{cases} 2/5, & \text{εάν } m = 3 \text{ ή } m = 4, \\ 1/5, & \text{εάν } m = 2, \\ 0, & \text{εάν } m = 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.8. Από μία συντηρητική ομάδα σχεδίασης, ας την ονομάσουμε C, και μία πρωτοποριακή ομάδα σχεδίασης, ας την ονομάσουμε N, ζητάμε να σχεδιαστεί χωριστά ένα καινούριο προϊόν μέσα σε ένα μήνα. Από προηγούμενη εμπειρία γνωρίζουμε ότι:

(α) Η πιθανότητα η ομάδα C να είναι επιτυχής, είναι 2/3.

(β) Η πιθανότητα η ομάδα N να είναι επιτυχής, είναι 1/2.

(γ) Η πιθανότητα τουλάχιστον μία ομάδα να είναι επιτυχής, είναι 3/4.

Αν υποθέσουμε ότι παράγεται ακριβώς ένας επιτυχημένος σχεδιασμός, τότε ποια είναι η πιθανότητα να σχεδιάστηκε από την ομάδα N;

Εδώ υπάρχουν 4 δυνατά αποτελέσματα, που αντιστοιχούν στους τέσσερις συνδυασμούς επιτυχίας και αποτυχίας των δύο ομάδων:

SS : και οι δύο είναι επιτυχημένες, FF : και οι δύο είναι αποτυχημένες,
SF : η C επιτυγχάνει, η N αποτυγχάνει, FS : η C αποτυγχάνει, η N επιτυγχάνει.

Μας δίνεται ότι οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων αυτών ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathrm{P}(SS) + \mathrm{P}(SF) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{P}(SS) + \mathrm{P}(FS) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(SS) + \mathrm{P}(SF) + \mathrm{P}(FS) = \frac{3}{4}.$$

Από τις σχέσεις αυτές, μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\mathrm{P}(SS) + \mathrm{P}(SF) + \mathrm{P}(FS) + \mathrm{P}(FF) = 1,$$

έχουμε τις πιθανότητες όλων των ενδεχομένων:

$$\mathrm{P}(SS) = \frac{5}{12}, \qquad \mathrm{P}(SF) = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(FS) = \frac{1}{12}, \qquad \mathrm{P}(FF) = \frac{1}{4}.$$

Η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι

$$\mathrm{P}\big(FS \mid \{SF, FS\}\big) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{4}.$$

Μοντελοποίηση Βασισμένη στη Χρήση Δεσμευμένης Πιθανότητας

Όταν κατασκευάζουμε μοντέλα πιθανοτήτων τα οποία έχουν ακολουθιακό χαρακτήρα, συχνά μας εξυπηρετεί να προσδιορίσουμε κατ' αρχάς δεσμευμένες πιθανότητες και ακολούθως να τις χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε αδέσμευτες πιθανότητες. Ο κανόνας $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$, που έπεται από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, διευκολύνει συχνά τη διαδικασία αυτή.

Παράδειγμα 1.9. Ανίχνευση Ραντάρ. Εάν ένα αεροσκάφος βρίσκεται σε κάποια περιοχή, ένα ραντάρ καταγράφει σωστά την παρουσία του με πιθανότητα 0.99. Εάν δεν βρίσκεται στην περιοχή, το ραντάρ καταγράφει λανθασμένα την παρουσία του με πιθανότητα 0.10. Υποθέτουμε ότι ένα αεροσκάφος είναι παρόν με πιθανότητα 0.05. Ποια είναι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (λανθασμένη ένδειξη παρουσίας αεροσκάφους), και ποια είναι η πιθανότητα έλλειψης ανίχνευσης (καμία ανίχνευση δεν γίνεται, παρόλο που το αεροσκάφος είναι παρόν);

Μια ακολουθιακή αναπαράσταση του πειράματος, παρουσιάζεται στο Σχ. 1.9. Έστω A και B τα γεγονότα

$$A = \{\text{ένα αεροσκάφος είναι παρόν}\},$$
$$B = \{\text{το ραντάρ ανιχνεύει την παρουσία ενός αεροσκάφους}\},$$

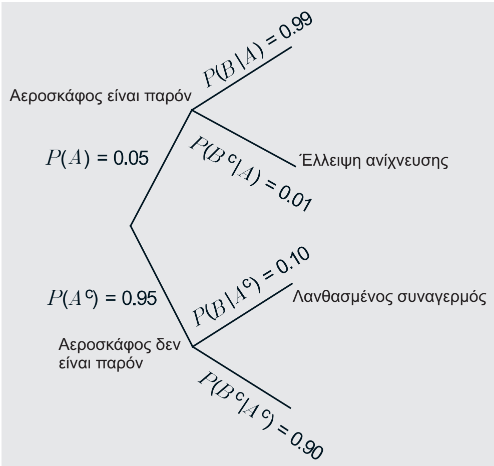
και θεωρούμε και τα συμπληρωματικά τους

$$A^c = \{\text{ένα αεροσκάφος δεν είναι παρόν}\},$$
$$B^c = \{\text{το ραντάρ δεν ανιχνεύει την παρουσία ενός αεροσκάφους}\}.$$

Οι πιθανότητες που δίνονται έχουν καταγραφεί κατά μήκος των αντιστοίχων κλαδιών του δένδρου που περιγράφει το δειγματικό χώρο, όπως παριστάνεται στο Σχ. 1.9.

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε ένα φύλλο του δένδρου και η πιθανότητα του ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων που έχουν σχέση με τα κλαδιά στο μονοπάτι από τη ρίζα πρός το αντίστοιχο φύλλο. Οι επιθυμητές πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού και έλλειψης ανίχνευσης είναι

$$\mathrm{P}(\text{λανθασμένου συναγερμού}) = \mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B \mid A^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095,$$
$$\mathrm{P}(\text{έλλειψη ανίχνευσης}) = \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c \mid A) = 0.05 \cdot 0.01 = 0.0005.$$



Σχήμα 1.9: Ακολουθιακή περιγραφή του πειράματος ανίχνευσης ραντάρ στο Παράδειγμα 1.9.

Επεκτείνοντας το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ένα γενικό κανόνα για να υπολογίσουμε διάφορες πιθανότητες σε συνδυασμό με μία χρονική περιγραφή ενός πειράματος βασισμένη σε δένδρο. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Οργανώνουμε το δένδρο έτσι ώστε ένα γεγονός που μας ενδιαφέρει να συνδέεται με ένα φύλλο. Θεωρούμε το συμβάν ενός γεγονότος ως μία σειρά από βήματα, συγκεκριμένα, τη διαπέραση των κλαδιών κατά μήκος του μονοπατιού από τη ρίζα έως το φύλλο.

(β) Καταγράφουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες που συνδέονται με τα κλαδιά του δένδρου.

(γ) Βρίσκουμε την πιθανότητα ενός φύλλου πολλαπλασιάζοντας τις πιθανότητες που έχουν καταγραφεί κατά μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού του δένδρου.

Με μαθηματικούς όρους, έχουμε να κάνουμε με ένα γεγονός A το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν καθένα από τα διάφορα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ έχουν συμβεί, δηλαδή, $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Το γεγονός A θεωρείται ως το

γεγονός A_1, ακολουθούμενο από το γεγονός A_2, ακολουθούμενο από A_3, κτλ. και απεικονίζεται ως ένα μονοπάτι με n κλαδιά, που αντιστοιχούν στα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$. Η πιθανότητα του A δίνεται από τον ακόλουθο κανόνα (βλ. επίσης Σχ. 1.10).

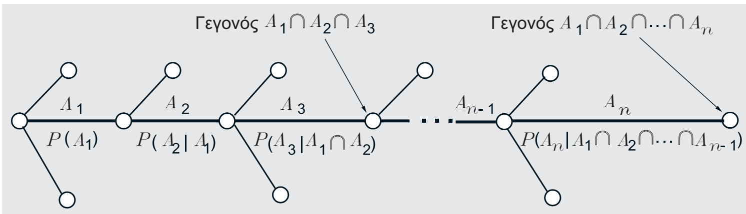
Κανόνας Πολλαπλασιασμού

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα υπό δέσμευση γεγονότα έχουν θετική πιθανότητα, έχουμε

$$\mathrm{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού μπορεί να επαληθευτεί γράφοντας

$$\mathrm{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathrm{P}(\cap_{i=1}^n A_i)}{\mathrm{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i)},$$



Σχήμα 1.10: Απεικόνιση του κανόνα του πολλαπλασιασμού. Το γεγονός τομής $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ συνδέεται με ένα μοναδικό μονοπάτι πάνω στο δένδρο. Συνδέουμε τα κλαδιά του μονοπατιού με τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ και καταγράφουμε δίπλα στα κλαδιά τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες.

Ο τελικός κόμβος του μονοπατιού αντιστοιχεί στο γεγονός τομής A και η πιθανότητα του προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των υπό δέσμευση πιθανοτήτων, οι οποίες είναι καταγραμμένες κατά μήκος των κλαδιών του μονοπατιού

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Σημειώστε ότι κάθε ενδιάμεσος κόμβος κατά μήκος του μονοπατιού αντιστοιχεί επίσης σε κάποιο ενδιάμεσο γεγονός και η πιθανότητα του προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες μέχρι τον κόμβο. Για παράδειγμα, το γεγονός $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ αντιστοιχεί στον κόμβο που παριστάνεται στο σχήμα και η πιθανότητα του είναι

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2).$$

και με βάση τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, ξαναγράφοντας τη δεξιά πλευρά ως εξής:

$$\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Για την περίπτωση μόνο 2 γεγονότων, A_1 και A_2, ο κανόνας του πολλαπλασιασμού είναι απλώς ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας.

Παράδειγμα 1.10. Τρία χαρτιά επιλέγονται από μία κοινή τράπουλα 52 χαρτιών χωρίς επανατοποθέτηση (τα επιλεγμένα χαρτιά δεν τοποθετούνται πίσω στην τράπουλα). Επιθυμούμε να βρούμε την πιθανότητα ότι κανένα από τα τρία χαρτιά δεν είναι κούπα. Υποθέτουμε ότι σε κάθε βήμα, καθένα από τα υπολειπόμενα χαρτιά έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Λόγω συμμετρίας, κάθε τριάδα της τράπουλας είναι ισοπίθανη να επιλεγεί. Μία δυνατή προσέγγιση, που δεν θα χρησιμοποποιήσουμε, είναι να μετρήσουμε το πλήθος όλων των τριάδων που δεν περιέχουν κούπα και να το διαιρέσουμε δια του πλήθους, όλων των δυνατών τριάδων της τράπουλας. Αντ' αυτής, χρησιμοποιούμε μία ακολουθιακή περιγραφή πειραμάτων σε συνδυασμό με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού (βλ. Σχ. 1.11).

Ορίζουμε τα γεγονότα

$$A_i = \{\text{το } i\text{-οστό χαρτί δεν είναι κούπα}\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ ότι κανένα από τα 3 χαρτιά δεν είναι κούπα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1)\mathrm{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2).$$

Έχουμε

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{39}{52},$$

εφόσον υπάρχουν 39 χαρτιά που δεν είναι κούπα στην τράπουλα των 52 χαρτιών. Δεδομένου ότι το πρώτο χαρτί δεν είναι κούπα, μας μένουν 51 χαρτιά, 38 από τα οποία δεν είναι κούπα, και επομένως

$$\mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1) = \frac{38}{51}.$$

Τελικά, δεδομένου ότι τα δύο πρώτα χαρτιά που έχουν επιλεγεί δεν είναι κούπα, υπάρχουν 37 χαρτιά που δεν είναι κούπα στα υπολειπόμενα 50 χαρτιά της τράπουλας, και επομένως

$$\mathrm{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) = \frac{37}{50}.$$

Αυτές οι πιθανότητες έχουν καταγραφεί κατά μήκος των αντιστοίχων κλαδιών του δένδρου που περιγράφει το δειγματικό χώρο, όπως δείχνεται στο Σχ. 1.11. Η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των πιθανοτήτων που καταγράφηκαν κατά μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού του δένδρου:

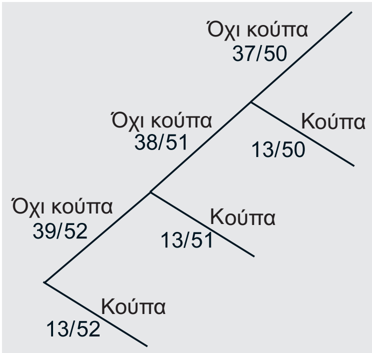
$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50}.$$

Σημειώστε, ότι μόλις οι πιθανότητες καταγραφούν κατά μήκος του δένδρου, η πιθανότητα αρκετών πειραμάτων μπορεί να υπολογισθεί με παρόμοιο τρόπο. Για

παράδειγμα,

$$\mathrm{P}(\text{το 1ο δεν είναι κούπα και το 2ο είναι κούπα}) = \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51},$$

$$\mathrm{P}(\text{τα πρώτα δύο δεν είναι κούπα και το 3ο είναι κούπα}) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{13}{50}$$



Σχήμα 1.11: Ακολουθιακή περιγραφή του πειράματος επιλογής 3 χαρτιών στο Παράδειγμα 1.10.

Παράδειγμα 1.11. Μία τάξη που αποτελείται από 4 μεταπτυχιακούς και 12 προπτυχιακούς φοιτητές χωρίζεται τυχαία σε 4 ομάδες των τεσσάρων. Ποια είναι η πιθανότητα κάθε ομάδα να περιλαμβάνει ένα μεταπτυχιακό φοιτητή; Εξηγούμε ότι με τη λέξη "τυχαία" εννοούμε ότι δεδομένης της τοποθέτησης μερικών φοιτητών σε κάποιες κενές θέσεις, οποιοσδήποτε φοιτητής που απομένει έχει ίση πιθανότητα να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις υπολοιπόμενες κενές θέσεις. Θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, βασισμένο στην περιγραφή ακολουθιακών πειραμάτων όπως στο Σχ. 1.12. Ας δηλώσουμε τους τέσσερεις μεταπτυχιακούς φοιτητές με 1, 2, 3, 4 και ας θεωρήσουμε τα γεγονότα

$$A_1 = \{\text{οι φοιτητές 1 και 2 είναι σε διαφορετικές ομάδες}\},$$
$$A_2 = \{\text{οι φοιτητές 1, 2, και 3 είναι σε διαφορετικές ομάδες}\},$$
$$A_3 = \{\text{οι φοιτητές 1, 2, 3, και 4 είναι σε διαφορετικές ομάδες}\}.$$

Θα υπολογίσουμε την $\mathrm{P}(A_3)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού:

$$\mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1)\mathrm{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2).$$

Έχουμε

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{12}{15},$$

εφόσον υπάρχουν 12 κενές θέσεις φοιτητών σε ομάδες εκτός από αυτή που ανήκει ο μεταπτυχιακός φοιτητής 1, και υπάρχουν 15 κενές θέσεις φοιτητών συνολικά, εξαιρουμένου του μεταπτυχιακού φοιτητή 1. Παρομοίως,

$$\mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1) = \frac{8}{14},$$

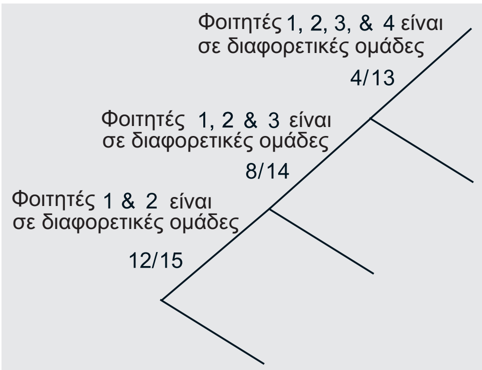
εφόσον υπάρχουν 8 κενές θέσεις φοιτητών σε ομάδες εκτός από αυτές που ανήκουν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές 1 και 2, και υπάρχουν 14 κενές θέσεις φοιτητών, εξαιρουμένων των μεταπτυχιακών φοιτητών 1 και 2. Επίσης,

$$\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{4}{13},$$

εφόσον υπάρχουν 4 κενές θέσεις φοιτητών σε ομάδες εκτός από αυτές που ανήκουν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές 1, 2 και 3, και υπάρχουν 13 κενές θέσεις φοιτητών, εξαιρουμένων των φοιτητών 1, 2, και 3. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13},$$

και προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις δεσμευμένες πιθανότητες κατά μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού του δένδρου στο Σχ. 1.12.



Σχήμα 1.12: Ακολουθιακή περιγραφή του πειράματος του Παραδείγματος 1.11.

Παράδειγμα 1.12. Το πρόβλημα του Monty Hall. Κάποιος σας πληροφορεί ότι ένα βραβείο έχει την ίδια πιθανότητα να βρεθεί πίσω από οποιαδήποτε από τις 3 κλειστές πόρτες που βρίσκονται μπροστά σας. Δείχνετε μία από τις πόρτες. Ένας φίλος σας ανοίγει μία από τις 2 υπολειπόμενες πόρτες, αφού σιγουρευτεί ότι το βραβείο δεν είναι πίσω από αυτή. Τώρα, μπορείτε να παραμείνετε στην αρχική σας επιλογή, ή να επιλέξετε την άλλη κλειστή πόρτα. Κερδίζετε το βραβείο εάν βρίσκεται πίσω από την τελικά επιλεγμένη πόρτα. Θεωρούμε τις παρακάτω στρατηγικές:

(α) Να παραμείνετε στην αρχική επιλογή.

(β) Να στραφείτε στην άλλη κλειστή πόρτα.

(γ) Πρώτα δείχνετε την πόρτα 1. Εάν η πόρτα 2 ανοίξει, δεν αλλάζετε γνώμη. Εάν η πόρτα 3 ανοίξει, αλλάζετε γνώμη.

Ποια είναι η καλύτερη στρατηγική; Για να απαντήσουμε στην ερώτηση, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα να κερδίσουμε χρησιμοποιώντας καθεμία από τις τρεις στρατηγικές.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη στρατηγική της μη αλλαγής, η αρχική επιλογή προσδιορίζει εάν κερδίζετε ή όχι, και η πιθανότητα να κερδίσετε είναι 1/3, και αυτό διότι το βραβείο έχει την ίδια πιθανότητα να βρίσκεται πίσω από κάθε πόρτα. Σύμφωνα με τη στρατηγική αλλαγής, εάν το βραβείο είναι πίσω από την αρχικά επιλεγμένη πόρτα (πιθανότητα 1/3), δεν κερδίζετε. Εάν όχι (πιθανότητα 2/3), και δεδομένου ότι μία πόρτα χωρίς βραβείο έχει ανοιχτεί για σας, θα φτάσετε στην πόρτα που κερδίζει μόλις αλλάξετε επιλογή. Άρα, η πιθανότητα να κερδίσετε είναι 2/3, ώστε η (β) είναι καλύτερη στρατηγική από την (α).

Θεωρήστε τώρα τη στρατηγική (γ). Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική, υπάρχει ανεπαρκής πληροφορία για να προσδιοριστεί η πιθανότητα επιτυχίας. Η απάντηση εξαρτάται από τον τρόπο που ο φίλος σας επιλέγει ποια πόρτα θα ανοίξει. Ας θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις.

Υποθέτουμε ότι εάν το βραβείο βρίσκεται πίσω από την πόρτα 1, ο φίλος πάντα επιλέγει να ανοίξει την πόρτα 2. (Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 2 ή 3, ο φίλος σας δεν έχει επιλογή.) Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 1, ο φίλος σας ανοίγει την πόρτα 2, δεν αλλάζετε γνώμη και κερδίζετε. Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 2, ο φίλος σας ανοίγει την πόρτα 3, αλλάζετε γνώμη, και κερδίζετε. Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 3, ο φίλος σας ανοίγει την πόρτα 2, δεν αλλάζετε γνώμη, και χάνετε. Τότε, η πιθανότητα να κερδίσετε είναι 2/3, ώστε η στρατηγική (γ) σε αυτή την περίπτωση είναι το ίδιο καλή με τη (β).

Υποθέτουμε τώρα ότι εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 1, ο φίλος σας έχει την ίδια πιθανότητα να ανοίξει είτε την πόρτα 2 ή την 3. Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 1 (πιθανότητα 1/3), και εάν ο φίλος σας ανοίξει την πόρτα 2 (πιθανότητα 1/2), δεν αλλάζετε γνώμη και κερδίζετε (πιθανότητα 1/6). Αλλά εάν ο φίλος σας ανοίξει την πόρτα 3, αλλάζετε γνώμη και χάνετε. Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 2, ο φίλος σας ανοίγει την πόρτα 3, αλλάζετε γνώμη, και κερδίζετε (πιθανότητα 1/3). Εάν το βραβείο είναι πίσω από την πόρτα 3, ο φίλος σας ανοίγει την πόρτα 2, δεν αλλάζετε γνώμη και χάνετε. Άρα, η πιθανότητα να κερδίσετε είναι $1/6 + 1/3 = 1/2$, ώστε η στρατηγική (γ) είναι χειρότερη από τη στρατηγική (β).

1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ BAYES

Στην παράγραφο αυτή, εξετάζουμε μερικές εφαρμογές της δεσμευμένης πιθανότητας. Αρχίζουμε με το παρακάτω θεώρημα, το οποίο συχνά χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων διαφόρων γεγονότων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του "διαίρει και βασίλευε".

Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας

Έστω $A_1, \ldots, A_n$ ξένα μεταξύ τους σύνολα που σχηματίζουν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου (κάθε δυνατό αποτέλεσμα περιέχεται σε ακριβώς ένα

από τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$) και υποθέτουμε ότι $\mathrm{P}(A_i) > 0$, για κάθε i.Τότε, για κάθε γεγονός B, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathrm{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B \mid A_n).\end{aligned}$$

Το θεώρημα απεικονίζεται και αποδεικνύεται στο Σχ. 1.13. Διαμερίζουμε το δειγματικό χώρο σε ένα αριθμό από γεγονότα A_i. Τότε η πιθανότητα ότι το γεγονός B συμβαίνει, είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος της δεσμευμένης πιθανότητας του σε σχέση με κάθε γεγονός, όπου κάθε γεγονός σταθμίζεται σύμφωνα με την (μη δεσμευμένη) πιθανότητα του. Μία από τις χρήσεις του θεωρήματος είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας διαφόρων γεγονότων B για τα οποία οι δεσμευμένες πιθανότητες $\mathrm{P}(B \mid A_i)$ είναι γνωστές ή είναι εύκολο να υπολογιστούν. Το κλειδί είναι να επιλεγεί σωστά η διαμέριση $A_1, \ldots, A_n$, με βάση τη δομή του προβλήματος. Δίνουμε μερικά τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.13. Παίρνετε μέρος σε ένα τουρνουά σκακιού όπου η πιθανότητα να κερδίσετε ένα παιχνίδι είναι 0.3 εναντίον των μισών παικτών (ας τους αποκαλέσουμε τύπου 1), 0.4 εναντίον του ενός τετάρτου των παικτών (ας τους αποκαλέσουμε τύπου 2), και 0.5 εναντίον του υπόλοιπου ενός τέταρτου των παικτών (ας τους αποκαλέσουμε τύπου 3). Παίζετε ένα παιχνίδι εναντίον ενός αντιπάλου που επιλέγεται με τυχαίο τρόπο. Ποια είναι η πιθανότητα νίκης;

Έστω A_i το γεγονός να παίξετε με αντίπαλο παίκτη τύπου i. Έχουμε

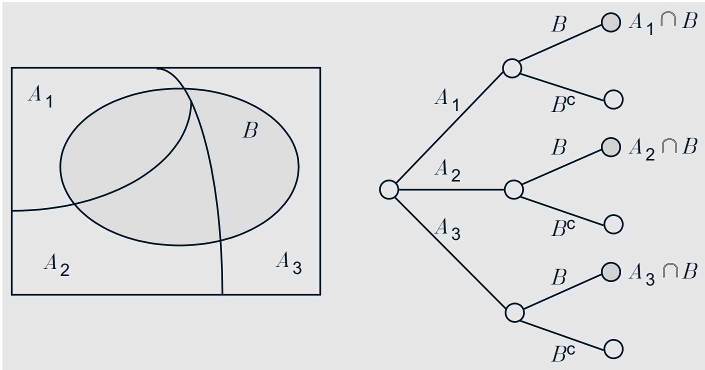
$$\mathrm{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(A_2) = 0.25, \qquad \mathrm{P}(A_3) = 0.25.$$

Έστω, επίσης, B το γεγονός να κερδίσετε. Έχουμε

$$\mathrm{P}(B \mid A_1) = 0.3, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_2) = 0.4, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_3) = 0.5.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας, η πιθανότητα νίκης είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B \mid A_2) + \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B \mid A_3) \\ &= 0.5 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.5 \\ &= 0.375.\end{aligned}$$



Σχήμα 1.13: Απεικόνιση και επαλήθευση του θεωρήματος της συνολικής πιθανότητας. Τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ σχηματίζουν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου, άρα το γεγονός B μπορεί να γραφεί ως μία ένωση των ξένων μεταξύ τους τομών $A_i \cap B$,

$$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της προσθετικότητας, έπεται ότι

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathrm{P}(A_n \cap B).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P}(A_i \cap B) = \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i),$$

και η προηγούμενη ισότητα δίνει

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B \mid A_n).$$

Εναλλακτικά θεωρήστε ένα ισοδύναμο ακολουθιακό μοντέλο, όπως απεικονίζεται δεξιά. Η πιθανότητα του φύλλου $A_i \cap B$ είναι το γινόμενο $\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)$ των πιθανοτήτων κατά μήκος του μονοπατιού που οδηγεί στο φύλλο αυτό. Το γεγονός B αποτελείται από τα τρία σκιασμένα φύλλα και η $\mathrm{P}(B)$ υπολογίζεται προσθέτοντας τις πιθανότητές τους.

Παράδειγμα 1.14. Ρίχνετε ένα αμερόληπτο τετράεδρο ζάρι. Εάν το αποτέλεσμα είναι 1 ή 2, το ρίχνετε ακόμη μία φορά, διαφορετικά σταματάτε. Ποια είναι η πιθανότητα το συνολικό άθροισμα των ρίψεων σας να είναι τουλάχιστον 4;

Έστω A_i το γεγονός το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης να είναι i, και σημειώστε ότι $\mathrm{P}(A_i) = 1/4$ για κάθε i. Έστω B το γεγονός το συνολικό άθροισμα των ρίψεων να είναι τουλάχιστον 4. Δεδομένου του γεγονότος A_1, το συνολικό άθροισμα θα είναι τουλάχιστον 4 εάν η δεύτερη ρίψη έχει ως αποτέλεσμα 3 ή 4, και αυτό συμβαίνει με πιθανότητα 1/2. Παρομοίως, δεδομένου του γεγονότος A_2, το συνολικό άθροισμα θα είναι τουλάχιστον 4 εάν η δεύτερη ρίψη έχει ως αποτέλεσμα 2, 3, ή 4, και αυτό συμβαίνει με πιθανότητα 3/4. Επίσης, δεδομένου του γεγονότος A_3, σταματάτε και το συνολικό άθροισμα παραμένει κάτω του 4. Επομένως,

$$\mathrm{P}(B \mid A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_2) = \frac{3}{4}, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_3) = 0, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_4) = 1.$$

Από το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας έπεται ότι,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{9}{16}.$$

Το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας μπορεί να εφαρμοστεί επανειλημμένα για να υπολογιστούν πιθανότητες σχετικές με πειράματα που έχουν ακολουθιακό χαρακτήρα, όπως παρουσιάζουμε στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.15. Η Αλίκη παρακολουθεί το μάθημα των πιθανοτήτων και στο τέλος κάθε εβδομάδας μπορεί να είναι ενήμερη της παραδοθείσης ύλης ή να έχει μείνει πίσω. Εάν είναι ενήμερη κάποια δεδομένη εβδομάδα, η πιθανότητα ότι θα είναι ενήμερη (ή πίσω) την επόμενη εβδομάδα είναι 0.8 (ή 0.2, αντίστοιχα). Εάν έχει μείνει πίσω μία εβδομάδα, η πιθανότητα ότι θα είναι ενήμερη (ή πίσω) την επόμενη εβδομάδα είναι 0.4 (ή 0.6, αντίστοιχα). Η Αλίκη είναι ενήμερη όταν αρχίζει την παρακολούθηση της τάξης της. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα είναι ενήμερη μετά από 3 εβδομάδες παρακολούθησης;

Έστω U_i και B_i τα γεγονότα ότι η Αλίκη είναι ενήμερη ή ότι έχει μείνει πίσω, αντίστοιχα, μετά από i εβδομάδες. Σύμφωνα με το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας, η επιθυμητή πιθανότητα $\mathrm{P}(U_3)$ δίνεται ως εξής:

$$\mathrm{P}(U_3) = \mathrm{P}(U_2)\mathrm{P}(U_3 \,|\, U_2) + \mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(U_3 \,|\, B_2) = \mathrm{P}(U_2) \cdot 0.8 + \mathrm{P}(B_2) \cdot 0.4.$$

Οι πιθανότητες $\mathrm{P}(U_2)$ και $\mathrm{P}(B_2)$ μπορούν, επίσης, να υπολογιστούν με τη χρήση του θεωρήματος της συνολικής πιθανότητας:

$$\mathrm{P}(U_2) = \mathrm{P}(U_1)\mathrm{P}(U_2 \,|\, U_1) + \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(U_2 \,|\, B_1) = \mathrm{P}(U_1) \cdot 0.8 + \mathrm{P}(B_1) \cdot 0.4,$$

$$\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(U_1)\mathrm{P}(B_2 \,|\, U_1) + \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2 \,|\, B_1) = \mathrm{P}(U_1) \cdot 0.2 + \mathrm{P}(B_1) \cdot 0.6.$$

Τελικά, αφού η Αλίκη αρχίζει το μάθημα της ενήμερη, έχουμε

$$\mathrm{P}(U_1) = 0.8, \qquad \mathrm{P}(B_1) = 0.2.$$

Μπορούμε τώρα να συνδυάσουμε τις προηγούμενες τρεις εξισώσεις για να πάρουμε

$$\mathrm{P}(U_2) = 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.72,$$

$$\mathrm{P}(B_2) = 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.28,$$

και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πιθανότητες έχουμε

$$\mathrm{P}(U_3) = 0.72 \cdot 0.8 + 0.28 \cdot 0.4 = 0.688.$$

Παρατηρήστε ότι θα μπορούσαμε να έχουμε υπολογίσει τη ζητούμενη πιθανότητα $\mathrm{P}(U_3)$ κατασκευάζοντας μία δενδρική περιγραφή του πειράματος, υπολογίζοντας

την πιθανότητα κάθε στοιχείου του U_3 χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού στο δένδρο, και αθροίζοντας. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις που ο υπολογισμός βασισμένος στο θεώρημα της συνολικής πιθανότητας είναι πιο εξυπηρετικός. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα $\mathrm{P}(U_{20})$ ότι ή Αλίκη είναι ενήμερη μετά από 20 εβδομάδες. Ο υπολογισμός αυτής της πιθανότητας χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού είναι πολύ άβολος, γιατί το δένδρο περιγραφής του πειράματος έχει 20-στάδια βάθος και 2^{20} φύλλα.

Αντιθέτως, με έναν υπολογιστή, ένας ακολουθιακός υπολογισμός χρησιμοποιώντας τους τύπους της συνολικής πιθανότητας

$$\mathrm{P}(U_{i+1}) = \mathrm{P}(U_i) \cdot 0.8 + \mathrm{P}(B_i) \cdot 0.4,$$
$$\mathrm{P}(B_{i+1}) = \mathrm{P}(U_i) \cdot 0.2 + \mathrm{P}(B_i) \cdot 0.6,$$

και τις αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}(U_1) = 0.8$, $\mathrm{P}(B_1) = 0.2$, είναι πολύ απλός.

Συμπερασματολογία και ο Κανόνας του Bayes

Το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας συχνά χρησιμοποιείται μαζί με το φημισμένο θεώρημα που δίνεται παρακάτω, το οποίο συνδέει δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $\mathrm{P}(A \mid B)$ με δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $\mathrm{P}(B \mid A)$, στις οποίες η σειρά της δέσμευσης είναι αντεστραμένη.

Κανόνας του Bayes

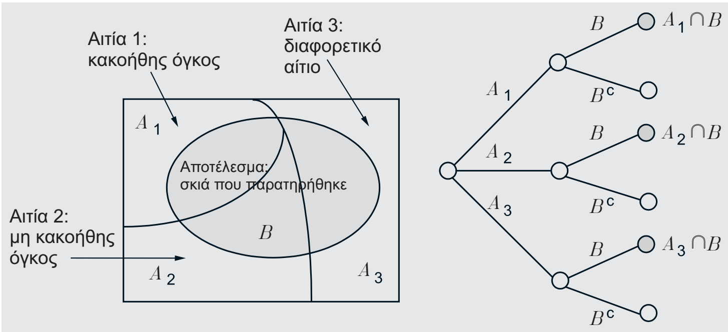
Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα που διαμορφώνουν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου, και υποθέτουμε ότι $\mathrm{P}(A_i) > 0$, για κάθε i. Τότε, για κάθε γεγονός B με $\mathrm{P}(B) > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_i \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B \mid A_n)}.\end{aligned}$$

Για να επαληθεύσουμε τον κανόνα του Bayes, σημειώνουμε ότι η $\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)$ και η $\mathrm{P}(A_i \mid B)\mathrm{P}(B)$ είναι ίσες, επειδή και οι δύο ισούνται με την $\mathrm{P}(A_i \cap B)$. Αυτό μας δίνει την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα προέρχεται από την πρώτη χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας για να ξαναγράψουμε την $\mathrm{P}(B)$.

Ο κανόνας του Bayes συχνά χρησιμοποιείται για να βγάλουμε κάποιο **συμπέρασμα**. Υπάρχει ένας αριθμός από “αιτίες” οι οποίες συντελούν σε κάποιο “αποτέλεσμα”. Παρατηρούμε το αποτέλεσμα, και επιθυμούμε να συμπεράνουμε

την αιτία. Τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ αντιπροσωπεύουν τις αιτίες και το γεγονός B αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα. Η πιθανότητα $\mathrm{P}(B \mid A_i)$, ότι το αποτέλεσμα που θα παρατηρηθεί οφείλεται στη παρουσία της αιτίας A_i, αποτελεί το μοντέλο πιθανότητας της σχέσης αιτίας-αποτελέσματος (βλ. Σχ. 1.14). Δεδομένου ότι το αποτέλεσμα B έχει παρατηρηθεί, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathrm{P}(A_i \mid B)$ της αιτίας A_i που έχει συντελέσει.



Σχήμα 1.14: Ένα παράδειγμα συμπερασματολογίας που χρησιμοποιεί τον κανόνα του Bayes. Παρατηρούμε μία σκιά στις ακτίνες X ενός ανθρώπου (αυτό είναι το γεγονός B, το "αποτέλεσμα") και θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα τριών ξένων μεταξύ τους (αμοιβαία αποκλειόμενων) και συλλογικά εξαντλητικών αιτιών: αιτία 1 (γεγονός A_1) είναι η ύπαρξη ενός κακοήθους όγκου, αιτία 2 (γεγονός A_2) είναι η ύπαρξη ενός μη κακοήθους όγκου, και αιτία 3 (γεγονός A_3) αντιστοιχεί σε διαφορετικές αιτίες. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(A_i)$ και $\mathrm{P}(B \mid A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Δεδομένου ότι βλέπουμε κάποια σκιά (το γεγονός B συμβαίνει), ο κανόνας του Bayes δίνει τις δεσμευμένες πιθανότητες των διαφόρων αιτιών

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B \mid A_2) + \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B \mid A_3)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Για μία εναλλακτική άποψη, θεωρήστε ένα ισοδύναμο ακολουθιακό μοντέλο, όπως παρουσιάζεται στα δεξιά. Η πιθανότητα $\mathrm{P}(A_1 \mid B)$ ενός κακοήθους όγκου είναι η πιθανότητα του πρώτου σκιασμένου φύλλου, που είναι η $\mathrm{P}(A_1 \cap B)$, διαιρούμενη δια της συνολικής πιθανότητας των σκιασμένων φύλλων, η οποία είναι η $\mathrm{P}(B)$.

Παράδειγμα 1.16. Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα της ανίχνευσης ραντάρ του Παραδείγματος 1.9 και Σχ. 1.9. Έστω

$$A = \{\text{ένα αεροσκάφος είναι παρόν}\},$$
$$B = \{\text{ένα ραντάρ καταγράφει την παρουσία ενός αεροσκάφους}\}.$$

Μας δίνεται ότι

$$P(A) = 0.05, \qquad \mathrm{P}(B \mid A) = 0.99, \qquad \mathrm{P}(B \mid A^c) = 0.1.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes, με $A_1 = A$ και $A_2 = A^c$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{αεροσκάφος είναι παρόν} \mid \text{ραντάρ το καταγράφει}) &= \mathrm{P}(A \mid B) \\
&= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B \mid A^c)} \\
&= \frac{0.05 \cdot 0.99}{0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.1} \\
&\approx 0.3426.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 1.17. Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα του σκακιού στο Παράδειγμα 1.13. Εδώ, το A_i είναι το γεγονός να έχουμε έναν αντίπαλο τύπου i, και

$$\mathrm{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(A_2) = 0.25, \qquad \mathrm{P}(A_3) = 0.25.$$

Επίσης, B είναι το γεγονός να κερδίσουμε, και

$$\mathrm{P}(B \mid A_1) = 0.3, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_2) = 0.4, \qquad \mathrm{P}(B \mid A_3) = 0.5.$$

Υποθέστε ότι κερδίζετε. Ποια είναι η πιθανότητα $\mathrm{P}(A_1 \mid B)$ να έχετε έναν αντίπαλο τύπου 1;

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B \mid A_2) + \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B \mid A_3)} \\
&= \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.5 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.5} \\
&= 0.4.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 1.18. Ο Αναληθής Γρίφος. Ένα τεστ για κάποια σπάνια ασθένεια υποτίθεται ότι είναι σωστό 95% του χρόνου: εάν ένα άτομο έχει την ασθένεια, το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό με πιθανότητα 0.95, ενώ εάν το άτομο δεν έχει την ασθένεια, το τεστ είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.95. Ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία από κάποιο πληθυσμό έχει πιθανότητα 0.001 να έχει την ασθένεια. Δεδομένου ότι για ένα άτομο το τεστ είναι θετικό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει την ασθένεια;

Εάν A είναι το γεγονός το άτομο να έχει την ασθένεια, και B είναι το γεγονός το αποτέλεσμα του τεστ να είναι θετικό, η ζητούμενη πιθανότητα, $\mathrm{P}(A \mid B)$, είναι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \mid B) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B \mid A^c)} \\
&= \frac{0.001 \cdot 0.95}{0.001 \cdot 0.95 + 0.999 \cdot 0.05} \\
&= 0.0187.
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι, αν και το τεστ είναι αρκετά ακριβές, το άτομο που έχει βρεθεί θετικό έχει πολύ μικρή πιθανότητα (λιγότερο από 2%) να έχει την ασθένεια. Σύμφωνα με το περιοδικό *The Economist* (20 Φεβρουαρίου, 1999), 80% από αυτούς που ερωτήθηκαν σε κάποιο γνωστό Αμερικανικό νοσοκομείο έκαναν λάθος σε ερωτήματα αυτού του τύπου. Οι περισσότεροι είπαν ότι η πιθανότητα κάποιος να έχει την ασθένεια είναι 0.95!

1.5 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Έχουμε εισάγει τη δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ για να εκφράσουμε την επιμέρους πληροφορία που μας παρέχει το γεγονός B σχετικά με το γεγονός A. Μία ενδιαφέρουσα και σημαντική περίπτωση είναι όταν η ύπαρξη του B δεν προσφέρει καμία πληροφορία και δεν αλλάζει την πιθανότητα το A να έχει συμβεί, δηλαδή,

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \mathrm{P}(A).$$

Όταν η παραπάνω ισότητα ισχύει, λέμε ότι το A είναι **ανεξάρτητο** του B. Παρατηρήστε ότι εξ αιτίας του ορισμού η $\mathrm{P}(A \,|\, B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$, η προηγούμενη ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Υιοθετούμε την τελευταία σχέση ως τον ορισμό της ανεξαρτησίας, διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και στην περίπτωση όπου $\mathrm{P}(B) = 0$, όταν δηλαδή η $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ δεν ορίζεται. Από τη συμμετρία της σχέσης αυτής συνεπάγεται ότι η ανεξαρτησία είναι μία συμμετρική ιδιότητα· δηλαδή, εάν το A είναι ανεξάρτητο του B, τότε το B είναι ανεξάρτητο του A, και μπορούμε χωρίς ασάφεια να πούμε ότι τα A και B είναι **ανεξάρτητα γεγονότα**.

Η ανεξαρτησία είναι εύκολο να κατανοηθεί διαισθητικά. Για παράδειγμα, εάν η ύπαρξη δύο γεγονότων καθορίζεται από ξεχωριστές και μη αλληλοεπιδρώμενες φυσικές διαδικασίες, τότε τα γεγονότα θα αποβούν ανεξάρτητα. Ωστόσο, η ανεξαρτησία δεν αναπαριστάνεται εύκολα στο δειγματικό χώρο. Μία κοινή πρώτη σκέψη είναι ότι δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα εάν είναι ξένα μεταξύ τους, αλλά στην πραγματικότητα συμβαίνει το αντίθετο: δύο ξένα μεταξύ τους γεγονότα A και B με $\mathrm{P}(A) > 0$ και $\mathrm{P}(B) > 0$ δεν είναι ποτέ ανεξάρτητα, επειδή η τομή $A \cap B$ είναι το κενό σύνολο και έχει πιθανότητα 0.

Παράδειγμα 1.19. Θεωρήστε ένα πείραμα που περιλαμβάνει 2 διαδοχικές ρίψεις ενός τετράεδρου ζαριού για το οποίο και τα 16 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα 1/16.

(α) Είναι τα γεγονότα

$$A_i = \{\text{1η ρίψη έχει αποτέλεσμα } i\}, \qquad B_j = \{\text{2η ρίψη έχει αποτέλεσμα } j\},$$

ανεξάρτητα; Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_i \cap B_j) &= \mathrm{P}\big(\text{το αποτέλεσμα δύο ρίψεων είναι } (i,j)\big) = \frac{1}{16}, \\ \mathrm{P}(A_i) &= \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } A_i}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{16}, \\ \mathrm{P}(B_j) &= \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } B_j}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{16}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{P}(A_i \cap B_j) = \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B_j)$, και η ανεξαρτησία του A_i και B_j επαληθεύεται. Άρα, η επιλογή του ομοιόμορφου διακριτού νόμου πιθανοτήτων (που μπορεί να φαίνεται αυθαίρετος) συνεπάγεται την ανεξαρτησία των δύο ρίψεων.

(β) Είναι τα γεγονότα

$$A = \{\text{1η ρίψη είναι } 1\}, \qquad B = \{\text{άθροισμα δύο ρίψεων είναι } 5\},$$

ανεξάρτητα; Η απάντηση δεν είναι προφανής. Έχουμε

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}\big(\text{το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι (1,4)}\big) = \frac{1}{16},$$

και επίσης

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων } A}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{16}.$$

Το γεγονός B αποτελείται από τα ενδεχόμενα (1,4), (2,3), (3,2), και (4,1), και

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } B}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{16}.$$

Άρα, βλέπουμε ότι $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, και τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

(γ) Είναι τα γεγονότα

$$A = \{\text{μέγιστο δύο ρίψεων είναι } 2\}, \quad B = \{\text{ελάχιστο δύο ρίψεων } 2\},$$

ανεξάρτητα; Διαισθητικά, η απάντηση είναι "όχι" επειδή το ελάχιστο δύο ρίψεων διαβιβάζει κάποια πληροφορία για το μέγιστο. Για παράδειγμα, εάν το ελάχιστο είναι 2, το μέγιστο δεν μπορεί να είναι 1. Πιο συγκεκριμένα, για να επαληθεύσουμε ότι τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα, υπολογίζουμε

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}\big(\text{το αποτέλεσμα δύο ρίψεων είναι (2,2)}\big) = \frac{1}{16},$$

και επίσης

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } A}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{16},$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } B}{\text{συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{5}{16}.$$

Έχουμε $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 15/(16)^2$, έτσι ώστε $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, και άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Δεσμευμένη Ανεξαρτησία

Σημειώσαμε νωρίτερα ότι οι δεσμευμένες πιθανότητες γεγονότων αποτελούν ένα αποδεκτό νόμο πιθανοτήτων. Επομένως, μπορούμε να αναφερόμαστε στην ανεξαρτησία διαφόρων γεγονότων στα πλαίσια του νόμου αυτού. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός γεγονότος C, τα γεγονότα A και B ονομάζονται **ανεξάρτητα υπό δέσμευση** εάν

$$\mathrm{P}(A \cap B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C)\mathrm{P}(B \mid C).$$

Για να αποδείξουμε ένα εναλλακτικό χαρακτηρισμό της δεσμευμένης ανεξαρτησίας χρησιμοποιούμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, για να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B \mid C) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(B \mid C)\mathrm{P}(A \mid B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \mathrm{P}(B \mid C)\mathrm{P}(A \mid B \cap C).\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τώρα τις δύο προηγούμενες εκφράσεις, και αφού εξαλείψουμε τον κοινό παράγοντα $\mathrm{P}(B \mid C)$, εφόσον τον υποθέσουμε μη μηδενικό, παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη ανεξαρτησία ισοδυναμεί με τη συνθήκη

$$\mathrm{P}(A \mid B \cap C) = \mathrm{P}(A \mid C).$$

Με άλλα λόγια, η σχέση αυτή δηλώνει ότι αν είναι γνωστό ότι το C έχει συμβεί, η επιπλέον πληροφορία ότι το B έχει επίσης συμβεί δεν αλλάζει την πιθανότητα του A.

Είναι ενδιαφέρον ότι η ανεξαρτησία δύο γεγονότων A και B υπό το νόμο πιθανότητας χωρίς δέσμευση, δεν συνεπάγεται ανεξαρτησία υπό δέσμευση, και αντίστροφα, όπως δείχνουν τα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.20. Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος, στις οποίες και τα τέσσερα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω

$$K_1 = \{\text{1η ρίψη είναι κορώνα}\},$$
$$K_2 = \{\text{2η ρίψη είναι κορώνα}\},$$
$$D = \{\text{οι δύο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα}\}.$$

Τα δύο γεγονότα K_1 και K_2 είναι (χωρίς δέσμευση) ανεξάρτητα. Αλλά

$$\mathrm{P}(K_1 \,|\, D) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(K_2 \,|\, D) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \,|\, D) = 0,$$

και $\mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \,|\, D) \neq \mathrm{P}(K_1 \,|\, D)\mathrm{P}(K_2 \,|\, D)$. Άρα τα K_1 και K_2 δεν είναι ανεξάρτητα υπό δέσμευση.

Παράδειγμα 1.21. Έχουμε δύο νομίσματα, ένα μπλε και ένα κόκκινο. Επιλέγουμε ένα από τα δύο τυχαία, καθένα με πιθανότητα επιλογής ίση με 1/2, και προχωρούμε σε δύο ανεξάρτητες ρίψεις. Τα νομίσματα δεν είναι αμερόληπτα: για το μπλε νόμισμα η πιθανότητα κορώνας σε οποιαδήποτε δεδομένη ρίψη είναι 0.99, ενώ για το κόκκινο είναι 0.01.

Έστω ότι B είναι το γεγονός ότι επιλέχτηκε το μπλε νόμισμα. Έστω, επίσης, K_i το γεγονός ότι η i-οστή ρίψη είχε σαν αποτέλεσμα κορώνα. Δεδομένης της επιλογής του νομίσματος, τα γεγονότα K_1 και K_2 είναι ανεξάρτητα, λόγω της υπόθεσής μας για ανεξάρτητες ρίψεις. Άρα,

$$\mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \,|\, B) = \mathrm{P}(K_1 \,|\, B)\mathrm{P}(K_2 \,|\, B) = 0.99 \cdot 0.99.$$

Αφετέρου, τα γεγονότα K_1 και K_2 δεν είναι ανεξάρτητα. Διαισθητικά, εάν μας πληροφορήσουν ότι η πρώτη ρίψη είχε ως αποτέλεσμα κορώνα, αυτό μας κάνει να υποψιαστούμε ότι έχει επιλεγεί το μπλε νόμισμα, και στην περίπτωση αυτή, περιμένουμε ότι και η δεύτερη ρίψη έχει ως αποτέλεσμα επίσης κορώνα. Από μαθηματικής άποψης, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P}(K_1) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(K_1 \,|\, B) + \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(K_1 \,|\, B^c) = \frac{1}{2} \cdot 0.99 + \frac{1}{2} \cdot 0.01 = \frac{1}{2},$$

όπως θα περιμέναμε λόγω συμμετρίας. Παρόμοια, έχουμε $\mathrm{P}(K_2) = 1/2$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K_1 \cap K_2) &= \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \,|\, B) + \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \,|\, B^c)\\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.99 \cdot 0.99 + \frac{1}{2} \cdot 0.01 \cdot 0.01 \approx \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Άρα $\mathrm{P}(K_1 \cap K_2) \neq \mathrm{P}(K_1)\mathrm{P}(K_2)$, και τα γεγονότα K_1 και K_2 είναι εξαρτώμενα, αν και είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητα δεδομένου του B.

Όπως έχουμε αναφέρει νωρίτερα, εάν τα A και B είναι ανεξάρτητα, η ύπαρξη του B δεν μας δίνει καμία καινούργια πληροφορία για την πιθανότητα ότι το

A πρόκειται να συμβεί. Τότε είναι διαισθητικά σαφές ότι και η μη ύπαρξη του B πρέπει να μη δίνει καμία πληροφορία για την πιθανότητα του A. Πράγματι, μπορεί να επαληθευτεί ότι εάν τα A και B είναι ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει για τα A και B^c (βλ. προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου).

Συνοψίζουμε τώρα στον επόμενο πίνακα.

Ανεξαρτησία

- Δύο γεγονότα A και B λέγονται **ανεξάρτητα** εάν

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

  Εάν επιπλέον, $\mathrm{P}(B) > 0$, η ανεξαρτησία ισοδυναμεί με τη συνθήκη

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A).$$

- Εάν τα A και B είναι ανεξάρτητα, το ίδιο είναι τα A και B^c.

- Δύο γεγονότα A και B λέγονται **υπό δέσμευση ανεξάρτητα**, δεδομένου ενός άλλου γεγονότος C με $\mathrm{P}(C) > 0$, εάν

$$\mathrm{P}(A \cap B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C)\mathrm{P}(B \mid C).$$

  Εάν επιπλέον $\mathrm{P}(B \cap C) > 0$, η δεσμευμένη ανεξαρτησία είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\mathrm{P}(A \mid B \cap C) = \mathrm{P}(A \mid C).$$

- Η ανεξαρτησία δεν συνεπάγεται δεσμευμένη ανεξαρτησία και αντίστροφα.

Ανεξαρτησία μίας Συλλογής Γεγονότων

Ο ορισμός της ανεξαρτησίας μπορεί να επεκταθεί για πολλά γεγονότα.

Ορισμός της Ανεξαρτησίας Πολλών Γεγονότων

Λέμε ότι τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι **ανεξάρτητα** εάν

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathrm{P}(A_i), \qquad \text{για κάθε υποσύνολο } S \text{ του } \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Για την περίπτωση τριών γεγονότων, A_1, A_2, και A_3, η ανεξαρτησία σημαίνει ότι οι παρακάτω τέσσερις συνθήκες ισχύουν:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2),\\
\mathrm{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_3),\\
\mathrm{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3),\\
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3).
\end{aligned}$$

Οι πρώτες τρεις συνθήκες απλώς επιβεβαιώνουν ότι οποιαδήποτε δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα, μία ιδιότητα που είναι γνωστή ως **ανεξαρτησία ανά ζεύγη**. Η τέταρτη συνθήκη είναι, επίσης, σημαντική και δεν συνεπάγεται από τις πρώτες τρεις. Αντιστρόφως, η τέταρτη συνθήκη δεν συνεπάγεται τις πρώτες τρεις· βλ. τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.22. Η Ανεξαρτησία ανά Ζεύγη δεν Συνεπάγεται Ανεξαρτησία. Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος, και τα ακόλουθα γεγονότα:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{\text{1η ρίψη είναι κορώνα}\},\\
K_2 &= \{\text{2η ρίψη είναι κορώνα}\},\\
D &= \{\text{οι δύο ρίψεις δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα}\}.
\end{aligned}$$

Τα γεγονότα K_1 και K_2 είναι ανεξάρτητα, εξ ορισμού. Για να δούμε ότι τα K_1 και D είναι ανεξάρτητα, σημειώνουμε ότι

$$\mathrm{P}(D \mid K_1) = \frac{\mathrm{P}(K_1 \cap D)}{\mathrm{P}(K_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(D).$$

Παρόμοια, τα K_2 και D είναι ανεξάρτητα. Αφετέρου, έχουμε

$$\mathrm{P}(K_1 \cap K_2 \cap D) = 0 \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathrm{P}(K_1)\mathrm{P}(K_2)\mathrm{P}(D),$$

και τα τρία αυτά γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.23. Η Ισότητα $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}(A_3)$ δεν είναι Αρκετή για Ανεξαρτησία. Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός αμερόληπτου 6-έδρου ζαριού, και τα ακόλουθα γεγονότα:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{1η ρίψη είναι 1, 2, ή 3}\},\\
B &= \{\text{1η ρίψη είναι 3, 4, ή 5}\},\\
C &= \{\text{το άθροισμα των ρίψεων είναι 9}\}.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) &= \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B), \\
\mathrm{P}(A \cap C) &= \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C), \\
\mathrm{P}(B \cap C) &= \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C).
\end{aligned}$$

Επομένως, τα τρία γεγονότα A, B, και C δεν είναι ανεξάρτητα. Αφετέρου έχουμε

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C).$$

Η διαίσθηση μας για ότι αφορά την ανεξαρτησία μίας συλλογής γεγονότων είναι ανάλογη με την περίπτωση των δύο γεγονότων. Ανεξαρτησία σημαίνει ότι η ύπαρξη ή η μη ύπαρξη **οποιουδήποτε αριθμού** γεγονότων από μία συλλογή δεν μεταφέρει καμία πληροφορία για τα υπόλοιπα γεγονότα ή τα συμπληρωματικά τους. Για παράδειγμα, εάν τα γεγονότα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι ανεξάρτητα, έχουμε σχέσεις όπως

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2)$$

ή

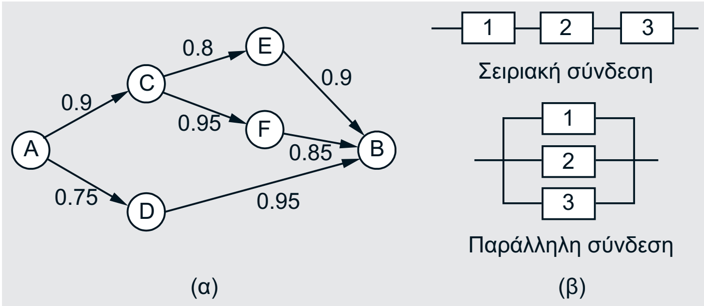
$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2^c \mid A_3^c \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2^c)\cdot$$

βλ. τα προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου.

Αξιοπιστία

Σε μοντέλα πιθανοτήτων πολύπλοκων συστημάτων τα οποία περιλαμβάνουν αρκετά επιμέρους στοιχεία, είναι συχνά κατάλληλο να υποθέσουμε ότι οι συμπεριφορές των επιμέρους στοιχείων δεν συνδέονται μεταξύ τους, είναι ανεξάρτητες. Αυτό συνήθως απλοποιεί τους υπολογισμούς και την ανάλυση, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.24. Συνδετικότητα Δικτύων. Ένα δίκτυο υπολογιστών συνδέει δύο κόμβους A και B δια μέσου των κόμβων C, D, E, F, όπως δείχνεται στο Σχ. 1.15(α). Για κάθε ζεύγος κόμβων οι οποίοι έχουν απευθείας σύνδεση, έστω i και j, δίνεται η πιθανότητα, p_{ij} ότι ο σύνδεσμος από i προς j είναι ενεργός, ανεξάρτητα εάν οι άλλοι σύνδεσμοι είναι ενεργοί. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο συνδέει τον A και B κατά μήκος του όποιου όλοι οι σύνδεσμοι είναι ενεργοί;



Σχήμα 1.15: (α) Το δίκτυο του Παραδείγματος 1.24. Ο αριθμός δίπλα σε κάθε σύνδεσμο δίνει την πιθανότητα να είναι ενεργός. (β) Σειριακές και παράλληλες συνδέσεις τριών επιμέρους στοιχείων στο πρόβλημα της αξιοπιστίας.

Το παραπάνω είναι ένα αντιπροσωπευτικό πρόβλημα ανάλυσης της αξιοπιστίας ενός συστήματος, το οποίο αποτελείται από επιμέρους στοιχεία που ενδέχεται να αποτυγχάνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να διαιρεθεί σε υποσυστήματα, όπου κάθε υποσύστημα αποτελείται από επιμέρους στοιχεία, τα οποία είναι συνδεδεμένα σε **σειριακές** ή **παράλληλες** συνδέσεις· βλ. Σχ. 1.15(β).

Έστω ότι ένα υποσύστημα αποτελείται από τα επιμέρους στοιχεία $1, 2, \ldots, m$, και έστω p_i η πιθανότητα ότι το επιμέρους στοιχείο i είναι ενεργό. Τότε, ένα σειριακό υποσύστημα επιτυγχάνει εάν **όλα** τα επιμέρους στοιχεία του είναι ενεργά, ώστε η πιθανότητα επιτυχίας του είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων των αντίστοιχων επιμέρους στοιχείων δηλαδή,

$$\mathrm{P}(\text{ένα σειριακό υποσύστημα επιτυγχάνει}) = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Ένα παράλληλο υποσύστημα επιτυγχάνει εάν **οποιοδήποτε** από τα στοιχεία του είναι ενεργό, άρα η πιθανότητα αποτυχίας του είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων αποτυχίας των αντίστοιχων επιμέρους στοιχείων του, δηλαδή,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{ένα παράλληλο υποσύστημα επιτυγχάνει}) &= 1 - \mathrm{P}(\text{ένα παράλληλο υποσύστημα} \\ &\qquad\qquad \text{αποτυγχάνει}) \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_m).\end{aligned}$$

Αν επιστρέψουμε τώρα στο δίκτυο του Σχ. 1.15(α), μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιτυχίας (ένα μονοπάτι από τον A στον B είναι διαθέσιμο) σειριακά, χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους, και ξεκινώντας από το τέλος. Ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $X \to Y$ για να δηλώσουμε το γεγονός ότι υπάρχει (πιθανώς έμμεση) σύνδεση από τον κόμβο X στον κόμβο Y. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C \to B) &= 1 - \big(1 - \mathrm{P}(C \to E \text{ και } E \to B)\big)\big(1 - \mathrm{P}(C \to F \text{ και } F \to B)\big) \\ &= 1 - (1 - p_{CE}p_{EB})(1 - p_{CF}p_{FB}) \\ &= 1 - (1 - 0.8 \cdot 0.9)(1 - 0.95 \cdot 0.85) \\ &= 0.946,\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(A \to C \text{ και } C \to B) = \mathrm{P}(A \to C)\mathrm{P}(C \to B) = 0.9 \cdot 0.946 = 0.851,$$

$$\mathrm{P}(A \to D \text{ και } D \to B) = \mathrm{P}(A \to D)\mathrm{P}(D \to B) = 0.75 \cdot 0.95 = 0.712,$$

και τελικά έχουμε τη ζητούμενη πιθανότητα

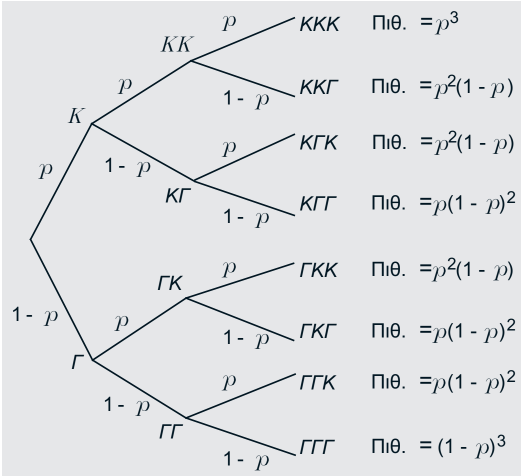
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \to B) &= 1 - \big(1 - \mathrm{P}(A \to C \text{ και } C \to B)\big)\big(1 - \mathrm{P}(A \to D \text{ και } D \to B)\big)\\ &= 1 - (1 - 0.851)(1 - 0.712)\\ &= 0.957.\end{aligned}$$

Ανεξάρτητες Επαναλήψεις και Διωνυμικές Πιθανότητες

Εάν ένα πείραμα περιλαμβάνει μία ακολουθία από ανεξάρτητα αλλά ίδια στάδια, τότε λέμε ότι έχουμε μία ακολουθία από **ανεξάρτητες επαναλήψεις**. Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα σε κάθε στάδιο, λέμε ότι έχουμε μία ακολουθία από ανεξάρτητες **επαναλήψεις Bernoulli**. Τα δύο δυνατά αποτελέσματα μπορεί να είναι οποιαδήποτε, δηλαδή, "βρέχει" ή "δεν βρέχει", αλλά συχνά θα αναφερόμαστε σε ρίψεις νομισμάτων και θα αποκαλούμε τα δύο αποτελέσματα "κορώνα" (*K*) και "γράμματα" (*Γ*).

Θεωρήστε ένα πείραμα το οποίο αποτελείται από n ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος, και στο οποίο η πιθανότητα κορώνας είναι p, όπου p ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1. Στην περίπτωση αυτή, ανεξαρτησία σημαίνει ότι τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα, όπου $A_i = \{i\text{-οστή ρίψη είναι κορώνα}\}$.

Μπορούμε να απεικονίσουμε ανεξάρτητες επαναλήψεις Bernoulli μέσω μίας ακολουθιακής περιγραφής, όπως δείχνει το Σχ. 1.16 για την περίπτωση όπου $n = 3$. Η δεσμευμένη πιθανότητα οποιασδήποτε ρίψης να είναι κορώνα, υπό τη δέσμευση οποιωνδήποτε προηγούμενων αποτελεσμάτων είναι p, λόγω ανεξαρτησίας. Άρα, με τον πολλαπλασιασμό των δεσμευμένων πιθανοτήτων κατά μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού του δένδρου, παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε αποτέλεσμα (μήκους 3 ακολουθία κορωνών και γραμμάτων) που περιλαμβάνει k κορώνες και $3 - k$ γράμματα έχει πιθανότητα $p^k(1-p)^{3-k}$. Ο τύπος αυτός επεκτείνεται στη γενική περίπτωση όπου ο αριθμός των ρίψεων είναι n. Τότε έχουμε ότι η πιθανότητα οποιασδήποτε μήκους n ακολουθίας η οποία περιλαμβάνει k κορώνες και $n - k$ γράμματα είναι $p^k(1-p)^{n-k}$, για όλα τα k από το 0 μέχρι το n.



Σχήμα 1.16: Ακολουθιακή περιγραφή ενός πειράματος το οποίο περιλαμβάνει τρεις ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος. Κατά μήκος των κλαδιών του δένδρου, καταγράφουμε τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες, και σύμφωνα με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, η πιθανότητα να έχουμε μία συγκεκριμένη ακολουθία μήκους 3 υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τις πιθανότητες οι οποίες έχουν καταγραφεί κατά μήκος του αντίστοιχου μονοπατιού του δένδρου.

Ας θεωρήσουμε τώρα την πιθανότητα

$$p(k) = \mathrm{P}(k \text{ κορώνες εμφανίζονται σε μία ακολουθία } n \text{ ρίψεων}),$$

η οποία θα παίξει αργότερα ένα σημαντικό ρόλο. Έχουμε δείξει παραπάνω ότι η πιθανότητα οποιασδήποτε δεδομένης ακολουθίας η οποία περιλαμβάνει k κορώνες είναι $p^k(1-p)^{n-k}$, άρα έχουμε

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\binom{n}{k} = \begin{array}{l}\text{πλήθος των διαφορετικών μήκους } n \text{ ακολουθιών ρίψεων}\\ \text{οι οποίες περιλαμβάνουν } k \text{ κορώνες.}\end{array}$$

Οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ είναι γνωστοί ως **διωνυμικοί συντελέστες** και οι πιθανότητες $p(k)$ είναι γνωστές ως **διωνυμικές πιθανότητες**. Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα αρίθμησης, το οποίο θα δοθεί στην Παράγραφο 1.6, θα δείξουμε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

όπου για οποιοδήποτε ακέραιο i συμβολίζουμε

$$i! = 1 \cdot 2 \cdots (i-1) \cdot i,$$

και, κατά σύμβαση, $0! = 1$. Μία εναλλακτική επαλήθευση σκιαγραφείται στα προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου. Σημειώστε ότι εφόσον οι διωνυμικές πιθανότητες $p(k)$ έχουν άθροισμα 1, έχουμε τον τύπο

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

Παράδειγμα 1.25. Ποιότητα Εξυπηρέτησης. Ένας οργανισμός ο οποίος παρέχει υπηρεσίες πρόσβασης στο διαδίκτυο, έχει εγκαταστήσει c modems για την εξυπηρέτηση των αναγκών ενός πληθυσμού n πελατών. Εκτιμάται ότι κάποια δεδομένη στιγμή, κάθε πελάτης θα έχει ανάγκη μίας σύνδεσης με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους. Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι πελάτες που χρειάζονται σύνδεση είναι περισσότεροι από τα υπάρχοντα modems;

Η πιθανότητα ότι υπάρχουν συγχρόνως περισσότεροι από c πελάτες οι οποίοι χρειάζονται μία σύνδεση είναι ίση με

$$\sum_{k=c+1}^{n} p(k),$$

όπου

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

είναι οι διωνυμικές πιθανότητες. Για παράδειγμα, εάν $n = 100$, $p = 0.1$, και $c = 15$, η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ότι είναι 0.0399.

Το παράδειγμα αυτό είναι αντιπροσωπευτικό του προσδιορισμού του μεγέθους μίας μονάδας εξυπηρέτησης με σκοπό την ικανοποίηση των αναγκών ενός ομοιογενούς πληθυσμού ο οποίος αποτελείται από πελάτες που συμπεριφέρονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Το πρόβλημα είναι να επιλεγεί το μέγεθος της μονάδας εξυπηρέτησης, με σκοπό να επιτευχθεί κάποια ελάχιστη πιθανότητα (συχνά αποκαλούμενη **ποιότητα εξυπηρέτησης**), ώστε κανένας πελάτης να μην μείνει χωρίς εξυπηρέτηση.

1.6 ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων συχνά απαιτεί την αρίθμηση των αποτελεσμάτων διαφορετικών γεγονότων. Έχουμε ήδη παρατηρήσει δύο πλαίσια όπου προκύπτει αρίθμηση.

(α) Όταν ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος ισοπίθανων αποτελεσμάτων για τα οποία ισχύει ο διακριτός και ομοιόμορφος νόμος πιθανοτήτων. Τότε, η πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος A δίνεται από

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{πλήθος των στοιχείων του } \Omega},$$

και περιλαμβάνει την αρίθμηση των στοιχείων του A και του Ω.

(β) Όταν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος A το οποίο περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος ισοπίθανων αποτελεσμάτων, καθένα από αυτά με μία γνωστή πιθανότητα p. Τότε η πιθανότητα του A δίνεται από

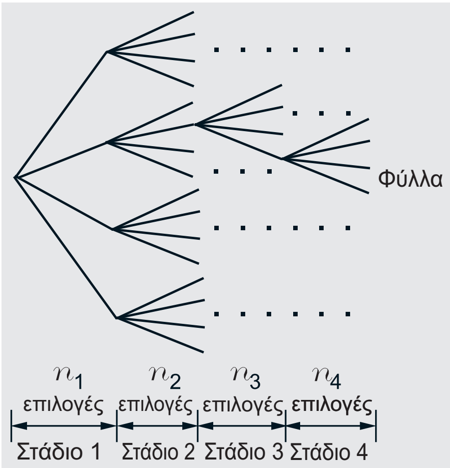
$$\mathrm{P}(A) = p \cdot (\text{πλήθος των στοιχείων του } A),$$

και περιλαμβάνει την αρίθμηση των στοιχείων του A. Ένα τέτοιου είδους παράδειγμα είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας k κορωνών σε n ρίψεις ενός νομίσματος (οι διωνυμικές πιθανότητες). Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η πιθανότητα κάθε διαφορετικής ακολουθίας η οποία περιλαμβάνει k κορώνες λαμβάνεται εύκολα, αλλά ο υπολογισμός του πλήθους όλων των ακολουθιών τέτοιου τύπου είναι, κάπως περίπλοκος.

Κατά κανόνα, ενώ η αρίθμηση είναι θεωρητικά κάτι απλό, είναι συχνά μία πρόκληση· η τέχνη της αρίθμησης αποτελεί ένα μεγάλο μέρος της επιστήμης της **συνδυαστικής**. Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε τις βασικές αρχές της αρίθμησης και τις εφαρμόζουμε σ' ένα πλήθος καταστάσεων τις οποίες συναντάμε συχνά σε μοντέλα πιθανοτήτων.

Η Αρχή της Αρίθμησης

Η αρχή της αρίθμησης βασίζεται στην μέθοδο "διαίρει και βασίλευε", όπου η αρίθμηση χωρίζεται σε στάδια, χρησιμοποιώντας ένα δένδρο. Για παράδειγμα, θεωρήστε ένα πείραμα το οποίο αποτελείται από δύο διαδοχικά στάδια. Τα δυνατά αποτελέσματα του πρώτου σταδίου είναι $a_1, a_2, \ldots, a_m$· Τα δυνατά αποτελέσματα του δεύτερου σταδίου είναι $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Τότε, τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος που αποτελείται από δύο στάδια είναι όλα τα **διατεταγμένα** ζεύγη (a_i, b_j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Παρατηρήστε ότι το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών ισούται με mn. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να γενικευτεί ως ακολούθως (βλ., επίσης Σχ. 1.17).



Σχήμα 1.17: Απεικόνιση της βασικής αρχής αρίθμησης. Η αρίθμηση αποτελείται από r στάδια ($r = 4$ στο σχήμα). Το πρώτο στάδιο έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα. Για κάθε δυνατό αποτέλεσμα των πρώτων $i - 1$ σταδίων, υπάρχουν n_i δυνατά αποτελέσματα στο i-οστό στάδιο. Το πλήθος των φύλλων είναι $n_1 n_2 \cdots n_r$. Αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Η Αρχή της Αρίθμησης

Θεωρήστε μία διαδικασία η οποία περιλαμβάνει r στάδια. Υποθέστε ότι:

(α) Υπάρχουν n_1 δυνατά αποτελέσματα στο πρώτο στάδιο.

(β) Για κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου, υπάρχουν n_2 δυνατά αποτελέσματα στο δεύτερο στάδιο.

(γ) Πιο γενικά, για κάθε δυνατό αποτέλεσμα των πρώτων $i - 1$ σταδίων, υπάρχουν n_i δυνατά αποτελέσματα στο i-οστό στάδιο.

Τότε, ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της συνολικής διαδικασίας είναι

$$n_1 n_2 \cdots n_r.$$

Παράδειγμα 1.26. Το Πλήθος των Αριθμών Τηλεφώνου. Ένας αριθμός τηλεφώνου (στην Αμερική) είναι μία ακολουθία 7 ψηφίων, αλλά το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι διαφορετικό από 0 ή 1. Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί τηλεφώνου υπάρχουν; Μπορούμε να φανταστούμε την επιλογή μίας ακολουθίας ως μία σειριακή διαδικασία, όπου επιλέγουμε κάθε φορά ένα ψηφίο. Έχουμε ένα σύνολο 7 σταδίων, και μία επιλογή

ενός από 10 στοιχεία σε κάθε στάδιο, εκτός του πρώτου σταδίου όπου έχουμε μόνο 8 επιλογές. Επομένως, η απάντηση είναι

$$8 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{6 \text{ φορές}} = 8 \cdot 10^6.$$

Παράδειγμα 1.27. Το Πλήθος των Υποσυνόλων ενός Συνόλου n Στοιχείων. Θεωρήστε ένα σύνολο n στοιχείων $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Πόσα υποσύνολα έχει το σύνολο αυτό (συμπεριλαμβανομένου του ίδιου και του κενού συνόλου); Μπορούμε να φανταστούμε την επιλογή ενός υποσυνόλου ως μία σειριακή διαδικασία όπου εξετάζουμε ένα στοιχείο κάθε φορά και αποφασίζουμε να το συμπεριλάβουμε στο σύνολο ή όχι. Έχουμε ένα σύνολο από n στάδια και μία δυαδική επιλογή σε κάθε στάδιο. Επομένως, ο αριθμός των υποσυνόλων είναι

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ φορές}} = 2^n.$$

Σημειώνουμε ότι η Αρχή της Αρίθμησης ισχύει ακόμη και αν το κάθε στάδιο οδηγεί σε ένα διαφορετικό σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, κτλ. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του κάθε σταδίου είναι σταθερό, ασχέτως με το αποτέλεσμα του προηγούμενου σταδίου.

Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε σε δύο τύπους αρίθμησης που περιλαμβάνουν την επιλογή k αντικειμένων από μία συλλογή n αντικειμένων. Εάν η σειρά της επιλογής έχει σημασία, τότε η επιλογή λέγεται **μετάθεση**, διαφορετικά, λέγεται **συνδυασμός**. Στην συνέχεια, θα συζητήσουμε μία πιο γενική αρχή αρίθμησης, η οποία αφορά μία **διαμέριση** μίας συλλογής n αντικειμένων σε πολλά υποσύνολα.

k-Μεταθέσεις

Αρχίζουμε με n διαφορετικά αντικείμενα, και έστω ότι το k είναι κάποιος θετικός ακέραιος, με $k \leq n$. Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε k από τα n αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε σε μία ακολουθία, δηλαδή, το πλήθος των διαφορετικών ακολουθιών k αντικειμένων. Μπορούμε να διαλέξουμε πρώτα οποιοδήποτε από τα n αντικείμενα. Αφού διαλέξουμε το πρώτο, υπάρχουν $n-1$ δυνατές επιλογές για το δεύτερο· δεδομένης της επιλογής των δύο πρώτων, υπάρχουν $n-2$ διαθέσιμες επιλογές για το τρίτο στάδιο, κ.ο.κ. Όταν είμαστε έτοιμοι να διαλέξουμε το τελευταίο (το k-οστό) αντικείμενο, έχουμε ήδη επιλέξει $k-1$ αντικείμενα, πράγμα το οποίο μας επιτρέπει $n-(k-1)$ επιλογές για το τελευταίο. Με βάση την Αρχή της Αρίθμησης, το πλήθος των δυνατών ακολουθιών, τις οποίες αποκαλούμε **k-μεταθέσεις**,

είναι

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Στην ειδική περίπτωση που $k = n$, το πλήθος των δυνατών ακολουθιών, που λέγονται **μεταθέσεις**, είναι

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

(Χρησιμοποιείστε $k = n$ στον τύπο του πλήθους των k-μεταθέσεων, και θυμηθείτε την παραδοχή $0! = 1$.)

Παράδειγμα 1.28. Ας αριθμήσουμε το πλήθος των λέξεων που αποτελούνται από τέσσερα διαφορετικά γράμματα. Αυτό είναι το πρόβλημα αρίθμησης 4-μεταθέσεων των 24 γραμμάτων της αλφαβήτου. Ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{24!}{20!} = 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21 = 255,024.$$

Η αρίθμηση των μεταθέσεων μπορεί να συνδυαστεί με την Αρχή της Αρίθμησης για την επίλυση πιο περίπλοκων προβλημάτων αρίθμησης.

Παράδειγμα 1.29. Έχετε n_1 CD κλασσικής μουσικής, n_2 CD ροκ μουσικής, και n_3 CD δημοτικής μουσικής. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να τα διατάξετε, έτσι ώστε τα CD ίδιου τύπου μουσικής να είναι συνεχόμενα;

Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο στάδια, όπου πρώτα επιλέγουμε τη σειρά των τύπων των CD και μετά τη σειρά των CD του ίδιου τύπου. Υπάρχουν 3! διατεταγμένες σειρές των τύπων των CD (π.χ. κλασσική/ροκ/δημοτική, ροκ/δημοτική/κλασσική, κτλ.) και υπάρχουν $n_1!$ (ή $n_2!$, ή $n_3!$) μεταθέσεις CD κλασσικής (ή ροκ, ή δημοτικής, αντίστοιχα). Άρα για κάθε μία από τις 3! CD τύπου σειρές, υπάρχουν $n_1!\,n_2!\,n_3!$ διατάξεις των CD και το ζητούμενο συνολικό πλήθος είναι $3!\,n_1!\,n_2!\,n_3!$.

Συνδυασμοί

Ενδιαφερόμαστε να επιλέξουμε μία επιτροπή k ατόμων από n διαθέσιμα άτομα. Πόσες διαφορετικές επιτροπές είναι δυνατές; Πιο αφηρημένα, αυτό είναι το ίδιο με το πρόβλημα της αρίθμησης του πλήθους των υποσυνόλων k στοιχείων ενός δεδομένου συνόλου n στοιχείων. Παρατηρήστε ότι το να επιλέξουμε ένα συνδυασμό είναι διαφορετικό από το να επιλέξουμε μία k-μετάθεση, επειδή **σε ένα**

συνδυασμό δεν υπάρχει σειρά με την οποία επιλέγουμε τα στοιχεία. Άρα για παράδειγμα, ενώ οι 2-μεταθέσεις των γραμμάτων A, B, C, και D είναι

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC,

οι συνδυασμοί των δύο από τα τέσσερα γράμματα είναι

AB, AC, AD, BC, BD, CD.

(Εφόσον τα στοιχεία ενός συνδυασμού δεν είναι διατεταγμένα, το BA δεν θεωρείται ότι είναι διαφορετικό από το AB.)

Για να αριθμήσουμε το πλήθος των συνδυασμών, παρατηρούμε ότι το να επιλέξουμε μία k-μετάθεση είναι το ίδιο με το να επιλέξουμε πρώτα ένα συνδυασμό k στοιχείων και μετά να τα διατάξουμε. Επειδή υπάρχουν $k!$ τρόποι διάταξης k επιλεγμένων στοιχείων, παρατηρούμε ότι το πλήθος $n!/(n-k)!$ των k-μεταθέσεων ισούται με το πλήθος των συνδυασμών επί $k!$. Άρα, ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών, ισούται με

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ας συνδέσουμε τώρα την παραπάνω έκφραση με το συντελεστή της διωνυμικής, τον οποίο συμβολίσαμε με $\binom{n}{k}$ και ορίσαμε στην Παράγραφο 1.5 ως το πλήθος των ακολουθιών n ρίψεων με k κορώνες. Παρατηρούμε ότι το να προσδιορίσουμε μία ακολουθία n ρίψεων με k κορώνες είναι το ίδιο με το να επιλέξουμε k στοιχεία (όλα αυτά που αντιστοιχούν σε κορώνες) από το σύνολο των n-ρίψεων/στοιχείων, δηλαδή, ένα συνδυασμό k από n αντικείμενα. Άρα, ο συντελεστής της διωνυμικής δίνεται επίσης από τον ίδιο τύπο και έχουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Παράδειγμα 1.30. Το πλήθος των συνδυασμών με δύο από τα τέσσερα γράμματα A, B, C, και D προκύπτει με το να θέσουμε $n = 4$ και $k = 2$. Άρα έχουμε

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6,$$

που συμφωνεί με αυτό που δόθηκε νωρίτερα.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα επιχειρήματα αρίθμησης οδηγούν σε τύπους που είναι δύσκολο να αποδειχθούν αλγεβρικά. Ένα παράδειγμα είναι ο **τύπος**

της διωνυμικής

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$$

τον οποίο συζητήσαμε στη Παράγραφο 1.5. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 1/2$, ο τύπος γίνεται

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

και επιδέχεται μία απλή ερμηνεία. Επειδή το $\binom{n}{k}$ είναι το πλήθος των υποσυνόλων k-στοιχείων ενός δεδομένου συνόλου n-στοιχείων, το άθροισμα των τιμών $\binom{n}{k}$ για όλα τα k μετράει το πλήθος όλων των δυνατών υποσυνόλων (πληθικότητα των υποσυνόλων). Επομένως, είναι ίσο με το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, το οποίο είναι 2^n.

Διαμερίσεις

Ας θυμηθούμε ότι ένας συνδυασμός αποτελείται από k στοιχεία επιλεγμένα από ένα σύνολο n στοιχείων, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Άρα, ένας συνδυασμός μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαμέριση ενός συνόλου σε δύο υποσύνολα: το ένα υποσύνολο περιέχει k στοιχεία και το άλλο υποσύνολο περιέχει τα υπόλοιπα $n-k$. Γενικεύουμε τώρα θεωρώντας διαμερίσεις σε περισσότερα από δύο υποσύνολα.

Μας δίνεται ένα σύνολο n στοιχείων και μη αρνητικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \ldots, n_r$, των οποίο το άθροισμα είναι n. Θεωρούμε διαμερίσεις του συνόλου σε r υποσύνολα, με το i-οστό υποσύνολο να περιέχει ακριβώς n_i στοιχεία. Ας υπολογίσουμε με πόσους τρόπους αυτό συμβαίνει.

Δημιουργούμε τα υποσύνολα διαδοχικά. Έχουμε $\binom{n}{n_1}$ τρόπους για να δημιουργήσουμε το πρώτο υποσύνολο. Έχωντας, δημιουργήσει το πρώτο υποσύνολο, μας απομένουν $n - n_1$ στοιχεία. Χρειαζόμαστε να επιλέξουμε n_2 από αυτά για να δημιουργήσουμε το δεύτερο υποσύνολο, και έχουμε $\binom{n-n_1}{n_2}$ επιλογές, κτλ. Χρησιμοποιώντας την Αρχή της Αρίθμησης για τη διαδικασία r σταδίων, το συνολικό πλήθος επιλογών είναι

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r},$$

το οποίο είναι ίσο με το

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{(n-n_1-\cdots-n_{r-1}-n_r)!\,n_r!}.$$

Παρατηρούμε ότι πολλοί όροι απλοποιούνται και μας μένει το

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

Το παραπάνω ονομάζεται **πολυωνυμικός συντελεστής** και συνήθως δηλώνεται ως

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}.$$

Παράδειγμα 1.31. Αναγραμματισμοί. Πόσες διαφορετικές λέξεις (ακολουθίες γραμμάτων) μπορούμε να έχουμε αναδιατάσσοντας τα γράμματα στη λέξη TATTOO; Υπάρχουν 6 θέσεις για να γεμίσουμε με τα γράμματα που διαθέτουμε. Κάθε αναδιάταξη αντιστοιχεί σε μία διαμέριση του συνόλου των 6 θέσεων σε μία ομάδα μεγέθους 3 (τις θέσεις που παίρνει το γράμμα T), μία ομάδα μεγέθους 1 (τη θέση που παίρνει το γράμμα A), και μία ομάδα μεγέθους 2 (τις θέσεις που παίρνει το γράμμα O). Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{6!}{1!\,2!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 60.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό με ένα εναλλακτικό επιχείρημα. (Το επιχείρημα αυτό μπορούμε, επίσης, να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τον τύπο του πολυωνυμικού συντελεστή· βλέπε προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου.) Ας γράψουμε τη λέξη TATTOO στη μορφή $\mathrm{T_1AT_2T_3O_1O_2}$ προσποιούμενοι προσωρινά ότι έχουμε να κάνουμε με 6 διακριτά αντικείμενα. Αυτά τα 6 αντικείμενα μπορούν να αναδιαταχθούν με 6! διαφορετικούς τρόπους. Εντούτοις, οποιεσδήποτε από τις 3! δυνατές μεταθέσεις $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$, και $\mathrm{T_3}$, όπως και όλες οι 2! δυνατές μεταθέσεις του $\mathrm{O_1}$ και $\mathrm{O_2}$, οδηγούν στην ίδια λέξη. Επομένως, όταν οι δείκτες αφαιρεθούν υπάρχουν μόνο $6!/(3!\,2!)$ διαφορετικές λέξεις.

Παράδειγμα 1.32. Μία τάξη η οποία αποτελείται από 4 μεταπτυχιακούς και 12 προπτυχιακούς φοιτητές διαιρείται τυχαία σε τέσσερις ομάδες των 4. Ποια είναι η πιθανότητα ότι κάθε ομάδα περιλαμβάνει ένα μεταπτυχιακό φοιτητή; Αυτό είναι το ίδιο με το Παράδειγμα 1.11 στην Παράγραφο 1.3, αλλά τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό επιχείρημα αρίθμησης.

Κατ' αρχάς προσδιορίζουμε τη φύση του δειγματικού χώρου. Ένα τυπικό αποτέλεσμα είναι ένας συγκεκριμένος τρόπος διαμέρισης των 16 φοιτητών σε ομάδες των 4. Θεωρούμε ότι ο όρος "τυχαία" εννοεί ότι κάθε δυνατή διαμέριση είναι ισοπίθανη, έτσι ώστε ο υπολογισμός της πιθανότητας μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα αρίθμησης.

Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση μας, υπάρχουν

$$\binom{16}{4, 4, 4, 4} = \frac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}$$

διαφορετικές διαμερίσεις και αυτό είναι το μέγεθος του δειγματικού χώρου.

Ας εστιαστούμε τώρα στο γεγονός ότι κάθε ομάδα περιέχει ένα μεταπτυχιακό φοιτητή. Ένα αποτέλεσμα με αυτή την ιδιότητα δημιούργειται και μπορεί να επιτευχθεί σε δύο στάδια:

(α) Έχετε τους τέσσερις μεταπτυχιακούς και τους διανέμετε στις τέσσερις ομάδες· υπάρχουν τέσσερις επιλογές για την ομάδα του πρώτου μεταπτυχιακού φοιτητή, τρεις επιλογές για τον δεύτερο και δύο επιλογές για τον τρίτο. Άρα, υπάρχουν 4! επιλογές σ' αυτό το στάδιο.

(β) Έχετε τους υπόλοιπους 12 προπτυχιακούς φοιτητές και τους διανέμετε στις τέσσερις ομάδες (3 φοιτητές σε κάθε μία). Αυτό γίνεται με

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$$

διαφορετικούς τρόπους.

Με βάση την Αρχή της Αρίθμησης, το γεγονός που μας ενδιαφέρει συμβαίνει με

$$\frac{4!\,12!}{3!\,3!\,3!\,3!}$$

διαφορετικούς τρόπους. Η πιθανότητα αυτού του γεγονότος είναι

$$\frac{\dfrac{4!\,12!}{3!\,3!\,3!\,3!}}{\dfrac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}}.$$

Μετά από μερικές απλοποιήσεις, βρίσκουμε ότι αυτό ισούται με

$$\frac{12\cdot 8\cdot 4}{15\cdot 14\cdot 13},$$

το οποίο συμφωνεί με την απάντηση που πήραμε στο Παράδειγμα 1.11.

Συνοψίζουμε όλα τα αποτελέσματα Αρίθμησης τα οποία έχουμε αναπτύξει.

Σύνοψη των Αποτελεσμάτων Αρίθμησης

- **Μεταθέσεις** των n αντικειμένων: $n!$.
- k-**μεταθέσεις** των n αντικειμένων: $n!/(n-k)!$.
- **Συνδυασμοί** των k από n αντικείμενα: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

- **Διαμερίσεις** των n αντικειμένων σε r ομάδες, με την i-οστή ομάδα να έχει n_i αντικείμενα:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

1.7 ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ένα πρόβλημα πιθανότητας μπορεί να χωριστεί σε μερικά βασικά βήματα:

(α) Την περιγραφή του δειγματικού χώρου, δηλαδή, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός δεδομένου πειράματος.

(β) Τον (πιθανά έμμεσο) προσδιορισμό του νόμου πιθανότητας (την πιθανότητα κάθε γεγονότος).

(γ) Τον υπολογισμό των πιθανοτήτων και των δεσμευμένων πιθανοτήτων διαφόρων γεγονότων που μας ενδιαφέρουν.

Οι πιθανότητες των γεγονότων πρέπει να ικανοποιούν τα αξιώματα της μη αρνητικότητας, της προσθετικότητας και της κανονικοποίησης. Στη σημαντική ειδική περίπτωση όπου το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι πεπερασμένο, μπορεί κανείς να προσδιορίσει την πιθανότητα κάθε αποτελέσματος και να υπολογίσει την πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος, προσθέτοντας τις πιθανότητες των στοιχείων του γεγονότος.

Δεδομένου ενός νόμου πιθανότητας, ενδιαφερόμαστε συχνά για δεσμευμένες πιθανότητες, οι οποίες μας επιτρέπουν να συλλογιστούμε με βάση ελλιπείς πληροφορίες για το αποτέλεσμα του πειράματος. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες ως νόμους πιθανοτήτων ειδικού τύπου, σύμφωνα με τους οποίους μόνο αποτελέσματα τα οποία εμπεριέχονται στο υπό δέσμευση γεγονός μπορούν να έχουν θετική δεσμευμένη πιθανότητα. Οι δεσμευμένες πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν από το (χωρίς δέσμευση) νόμο πιθανότητας χρησιμοποιώντας τον ορισμό $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$. Ωστόσο, η αντίστροφη διαδικασία είναι επίσης συχνά χρήσιμη, δηλαδή, πρώτα να προσδιορίσουμε μερικές δεσμευμένες πιθανότητες οι οποίες περιγράφουν το φαινόμενο που αναλύουμε και μετά να τις χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε τον (χωρίς δέσμευση) νόμο πιθανότητας.

Παρουσιάσαμε με παραδείγματα τρεις μεθόδους υπολογισμού πιθανοτήτων:

(α) Την **μέθοδο της αρίθμησης**. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση που ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι πεπερασμένος και όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος, αριθμούμε το πλήθος των στοιχείων του γεγονότος και διαιρούμε δια του πλήθους των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

(β) Την **ακολουθιακή μέθοδο**. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν το πείραμα έχει ακολουθιακό χαρακτήρα και οι αναγκαίες δεσμευμένες πιθανότητες είναι δεδομένες ή μπορούν να υπολογιστούν κατά μήκος των κλαδιών του αντίστοιχου δένδρου (χρησιμοποιώντας ίσως την μέθοδο της αρίθμησης). Οι πιθανότητες διαφόρων γεγονότων τότε υπολογίζονται με πολλαπλασιασμό των δεσμευμένων πιθανοτήτων κατά μήκος των αντίστοιχων κλαδιών του δένδρου, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πολλαπλασιασμού.

(γ) Η **μέθοδος διαίρει και βασίλευε**. Εδώ, οι πιθανότητες $\mathrm{P}(B)$ των διαφόρων γεγονότων B υπολογίζονται από τις δεσμευμένες πιθανότητες $\mathrm{P}(B \mid A_i)$, όπου τα A_i είναι γεγονότα που αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου και έχουν γνωστές πιθανότητες $\mathrm{P}(A_i)$. Τότε οι πιθανότητες $\mathrm{P}(B)$, υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας.

Επίσης, παρουσιάσαμε μερικά παράπλευρα θέματα τα οποία συμπληρώνουν τα κυρίως θέματα. Συζητήσαμε τη χρήση του κανόνα του Bayes για τη λήψη αποφάσεων, ένα ενδιαφέρον πεδίο εφαρμογής. Επίσης, συζητήσαμε μερικές βασικές αρχές αρίθμησης και συνδυαστικής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.1. Σύνολα

Πρόβλημα 1. Θεωρήστε ότι ρίχνετε ένα εξάεδρο ζάρι. Έστω A το σύνολο των αποτελεσμάτων όπου η ρίψη είναι ένας άρτιος αριθμός. Έστω B το σύνολο των αποτελεσμάτων όπου η ρίψη είναι μεγαλύτερη του 3. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τα σύνολα στις δύο πλευρές των νόμων του De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad \big(A \cap B\big)^c = A^c \cup B^c.$$

Πρόβλημα 2. Έστω A και B δύο σύνολα.

(α) Να δείξετε ότι

$$A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c), \qquad B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c).$$

(β) Να δείξετε ότι

$$(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c).$$

(γ) Θεωρήστε ότι ρίχνετε ένα εξάεδρο ζάρι. Έστω A το σύνολο των αποτελεσμάτων όπου η ρίψη είναι ένας περιττός αριθμός. Έστω B το σύνολο των αποτελεσμάτων όπου η ρίψη είναι μικρότερη του 4. Να υπολογίσετε τα σύνολα και στις δύο πλευρές του μέρους (β) και να επαληθεύσετε ότι ισχύει η ισότητα.

Πρόβλημα 3.* Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$A \cup \big(\cap_{n=1}^{\infty} B_n \big) = \cap_{n=1}^{\infty} (A \cup B_n).$$

Λύση. Εάν το x ανήκει στο σύνολο στα αριστερά, υπάρχουν δύο δυνατότητες. Είτε το $x \in A$, οπότε το x ανήκει σε όλα τα σύνολα $A \cup B_n$ και επομένως ανήκει στο σύνολο στα δεξιά. Είτε το x ανήκει σε όλα τα σύνολα B_n οπότε στην περίπτωση αυτή ανήκει σε όλα τα σύνολα $A \cup B_n$ και επομένως ξανά ανήκει στο σύνολο στα δεξιά.

Αντίθετα, εάν το x ανήκει στο σύνολο στα δεξιά, τότε ανήκει στο $A \cup B_n$ για όλα τα n. Εάν το x ανήκει στο A, τότε ανήκει στο σύνολο στα αριστερά. Διαφορετικά, το x πρέπει να ανήκει σε κάθε σύνολο B_n και ξανά ανήκει στο σύνολο προς τα αριστερά.

Πρόβλημα 4.* Το επιχείρημα της διαγωνίου του Cantor. Να δείξετε ότι το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ είναι μη αριθμήσιμο, δηλαδή, τα στοιχεία του δεν μπορούν να τοποθετηθούν σε μία ακολουθία.

Λύση. Οποιοσδήποτε αριθμός x στο $[0,1]$ αντιπροσωπεύεται από την ανάπτυξη των δεκαδικών του, π.χ., $1/3 = 0.3333\cdots$. Παρατηρήστε ότι οι περισσότεροι αριθμοί έχουν μία μόνο ανάπτυξη δεκαδικών, αλλά υπάρχουν εξαιρέσεις. Για παράδειγμα, το 1/2 μπορεί να αντιπροσωπευτεί σαν $0.5000\cdots$ ή σαν $0.49999\cdots$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός είναι ο μόνος τύπος εξαίρεσης, δηλαδή, δεκαδικής ανάπτυξης η οποία τελειώνει με μία άπειρη σειρά από μηδενικά ή από εννέα.

Υποθέστε, για να καταλήξουμε σε μία αντίφαση, ότι τα στοιχεία του $[0,1]$ μπορούν να τοποθετηθούν σε μία ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots$, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $[0,1]$ εμφανίζεται στην ακολουθία. Θεωρήστε τη δεκαδική ανάπτυξη του x_n:

$$x_n = 0.a_n^1 a_n^2 a_n^3 \cdots,$$

όπου το κάθε ψηφίο a_n^i ανήκει στο $\{0,1,\ldots,9\}$. Θεωρήστε τώρα τον αριθμό y ο οποίος δημιουργείτε ως ακολούθως. Το n-οστό ψηφίο του y μπορεί να είναι 1 ή 2 και επιλέγεται έτσι ώστε να είναι διαφορετικό από το n-οστό ψηφίο του x_n. Παρατηρήστε ότι το y έχει μία μοναδική δεκαδική ανάπτυξη εφόσον δεν τελειώνει με μία άπειρη ακολουθία από μηδενικά ή εννέα. Ο αριθμός y διαφέρει από κάθε x_n, εφόσον έχει διαφορετικό n-οστό ψηφίο. Άρα, η ακολουθία $x_1, x_2, \ldots$ δεν εξαντλεί τα στοιχεία του $[0,1]$, αντίθετα με την υπόθεση μας. Η αντίφαση αποδεικνύει ότι το σύνολο $[0,1]$ είναι μη αριθμήσιμο.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.2. Μοντέλα Πιθανότητας

Πρόβλημα 5. Από τους φοιτητές μία τάξης, το 60% είναι ιδιοφυίες, το 70% αγαπούν τη σοκολάτα και το 40% ανήκουν και στις δύο κατηγορίες. Να προσδιορίσετε την πιθανότητα ότι ένας φοιτητής που επιλέγεται τυχαία δεν είναι ούτε ιδιοφυία ούτε αγαπά τη σοκολάτα.

Πρόβλημα 6. Ένα εξάεδρο ζάρι μεταποιείται, έτσι ώστε κάθε άρτια πλευρά του να είναι δύο φορές πιο πιθανή από μία περιττή πλευρά του. Όλες οι άρτιες πλευρές είναι ισοπίθανες, όπως είναι και οι περιττές. Να δημιουργήσετε ένα μοντέλο πιθανότητας για μία μοναδική ρίψη του ζαριού αυτού και να βρείτε την πιθανότητα ότι το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του 4.

Πρόβλημα 7. Ένα τετράεδρο ζάρι ρίχνεται επανειλημμένα, μέχρι την πρώτη φορά (εάν ποτέ συμβεί) που προκύπτει ένας άρτιος αριθμός. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού;

Πρόβλημα 8.* Η ανισότητα του Bonferroni.

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο γεγονότα A και B, έχουμε

$$\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1.$$

(β) Να γενικεύσετε για την περίπτωση των n γεγονότων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, δείχνοντας ότι

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) - (n-1).$$

Λύση. Έχουμε $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ και $\mathrm{P}(A \cup B) \leq 1$, από το οποίο συνεπάγεται το μέρος (α). Για το μέρος (β), χρησιμοποιούμε το νόμο του De Morgan:

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathrm{P}\big((A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c\big) \\ &= \mathrm{P}(A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c) \\ &\leq \mathrm{P}(A_1^c) + \cdots + \mathrm{P}(A_n^c) \\ &= \big(1 - \mathrm{P}(A_1)\big) + \cdots + \big(1 - \mathrm{P}(A_n)\big) \\ &= n - \mathrm{P}(A_1) - \cdots - \mathrm{P}(A_n). \end{aligned}$$

Πρόβλημα 9.* Ο τύπος εγκλεισμού-αποκλεισμού. Να δείξετε τις παρακάτω γενικεύσεις του τύπου

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

(α) Έστω τα γεγονότα A, B, και C. Τότε,

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

(β) Έστω τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Έστω $S_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $S_2 = \{(i_1, i_2) \mid 1 \leq i_1 < i_2 \leq n\}$, και πιο γενικά, έστω S_m το σύνολο όλων των m-άδων $(i_1, \ldots, i_m)$ δεικτών οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\cup_{k=1}^n A_k\right) = &\sum_{i \in S_1} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{(i_1, i_2) \in S_2} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &+ \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in S_3} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\cap_{k=1}^n A_k\right). \end{aligned}$$

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε τους τύπους $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$ και $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap C) \\ &\quad + \mathrm{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιήστε επαγωγή και επαληθεύστε το κυρίως βήμα επαγωγής μιμούμενοι την απόδειξη του μέρους (α). Για μία διαφορετική απόδειξη, βλέπετε τα προβλήματα στο τέλος του Κεφαλαίου 2.

Πρόβλημα 10.* Η ιδιότητα συνέχειας των πιθανοτήτων.

(α) Έστω $A_1, A_2, \ldots$ μία άπειρη ακολουθία γεγονότων, η οποία είναι "μονοτονικά αύξουσα," το οποίο σημαίνει ότι $A_n \subset A_{n+1}$ για κάθε n. Έστω $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Να δείξετε ότι η $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$. *Υπόδειξη:* Να εκφράσετε το γεγονός A ως μία ένωση από μία αριθμήσιμη ακολουθία από ξένα μεταξύ τους σύνολα.

(β) Υποθέστε τώρα ότι τα γεγονότα είναι "μονοτονικά φθίνοντα," δηλαδή, $A_{n+1} \subset A_n$ για κάθε n. Έστω $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Να δείξετε ότι η $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$. *Υπόδειξη:* Να εφαρμόσετε το αποτέλεσμα του μέρους (α) στα συμπληρωματικά των γεγονότων.

(γ) Θεωρήστε ένα μοντέλο πιθανότητας του οποίου ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι

$$\mathrm{P}\big([0,\infty)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big([0,n]\big) \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big([n,\infty)\big) = 0.$$

Λύση. (α) Έστω $B_1 = A_1$ και, για $n \geq 2$, $B_n = A_n \cap A_{n-1}^c$. Τα γεγονότα B_n είναι ξένα μεταξύ τους και έχουμε $\cup_{k=1}^{n} B_k = A_n$, και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = A$. Εφαρμόζουμε το αξίωμα της προσθετικότητας για να έχουμε

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

(β) Έστω $C_n = A_n^c$ και $C = A^c$. Εφόσον $A_{n+1} \subset A_n$, έχουμε $C_n \subset C_{n+1}$. Επιπλέον, $C = A^c = (\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Αν χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του μέρους (α) για την ακολουθία C_n, έχουμε

$$1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^c) = \mathrm{P}(C) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} \big(1 - \mathrm{P}(A_n)\big),$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

(γ) Για την πρώτη ισότητα, χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του μέρους (α) με $A_n = [0, n]$ και $A = [0, \infty)$. Για την δεύτερη, χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του μέρους (β) με $A_n = [n, \infty)$ και $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Πρόβλημα 11. Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα εξάεδρα ζάρια. Καθένα από τα 36 δυνατά αποτελέσματα υποτίθενται ισοπίθανα.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα ότι ρίχνονται διπλές.

(β) Δεδομένου ότι η ρίψη έχει ως αποτέλεσμα άθροισμα 4 ή λιγότερο, να βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι ρίχνονται διπλές.

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα ζάρι έρχεται 6.

(δ) Δεδομένου ότι τα δύο ζάρια δίνουν διαφορετικούς αριθμούς, να βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα ζάρι έρχεται 6.

Πρόβλημα 12. Ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές. Η Αλίκη ισχυρίζεται ότι το γεγονός δύο κορωνών είναι τουλάχιστον το ίδιο πιθανό εάν γνωρίζουμε ότι η πρώτη ρίψη είναι κορώνα ή εάν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις ρίψεις είναι κορώνα. Είναι αυτό σωστό; Αλλάζει τίποτα αν το νόμισμα είναι αμερόληπτο ή κίβδηλο; Πως μπορούμε να γενικεύσουμε τον τρόπο συλλογισμού της Αλίκης;

Πρόβλημα 13. Μας δίνονται τρία νομίσματα: το ένα έχει κορώνα και στις δύο πλευρές, το δεύτερο έχει γράμματα και στις δύο πλευρές και το τρίτο έχει κορώνα στην μία πλευρά και γράμματα στην άλλη. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη, το ρίχνουμε και έρχεται κορώνα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η άλλη πλευρά είναι γράμματα;

Πρόβλημα 14. Ένα φορτίο που αποτελείται από 100 κομμάτια περνάει από επιθεώρηση, ελέγχοντας τέσσερα κομμμάτια που επιλέγονται. Εάν ένα από τα τέσσερα είναι ελαττωματικό, η παρτίδα απορρίπτεται. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η παρτίδα εγκρίνεται εάν περιέχει πέντε ελαττωματικά κομμάτια;

Πρόβλημα 15. Έστω σαν γεγονότα A και B. Να δείξετε ότι $\mathrm{P}(A \cap B \,|\, B) = \mathrm{P}(A \,|\, B)$, υποθέτοντας ότι $\mathrm{P}(B) > 0$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.4. Το Θεώρημα της Συνολικής Πιθανότητας και ο Κανόνας του Bayes

Πρόβλημα 16. Η Αλίκη ψάχνει για μία εργασία της στο γραφείο της, το οποίο έχει n συρτάρια. Γνωρίζει ότι άφησε την εργασία της στο συρτάρι j με πιθανότητα $p_j > 0$. Τα συρτάρια είναι τόσο ακατάστατα, ώστε και αν ακόμα μαντέψει σωστά ότι η εργασία της είναι στο συρτάρι i, η πιθανότητα να τη βρει είναι μόνο d_i. Η Αλίκη ψάχνει σε ένα συγκεκριμένο συρτάρι, ας πούμε το συρτάρι i, αλλά η έρευνα είναι ανεπιτυχής. Να δείξετε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα να βρίσκεται η εργασία της στο συρτάρι j είναι,

$$\frac{p_j}{1 - p_i d_i}, \qquad \text{εάν } j \neq i, \qquad\qquad \frac{p_i(1 - d_i)}{1 - p_i d_i}, \qquad \text{εάν } j = i.$$

Πρόβλημα 17. Πως ένας κατώτερος παίκτης με μία ανώτερη στρατηγική μπορεί να έχει πλεονέκτημα. Ο Boris πρόκειται να παίξει έναν αγώνα σκακιού δύο παιχνιδιών με έναν αντίπαλο και προσπαθεί να βρει μία στρατηγική η οποία να μεγιστοποιεί την ενδεχόμενη νίκη του. Ένα παιχνίδι λήγει είτε με νίκη ενός παίκτη, ή με ισοπαλία. Εάν οι πόντοι είναι ακριβώς ίσοι στο τέλος των δύο παιχνιδιών, ο αγώνας οδηγείται σε κατάσταση Ξαφνικού Θανάτου και οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν μέχρι την πρώτη φορά που ένας από τους δύο κερδίσει το παιχνίδι (και τον αγώνα). Ο Boris έχει δύο στυλ παιχνιδιού, *συντηρητικό* και *τολμηρό*, και μπορεί να επιλέξει ένα από τα δύο κατά βούληση σε κάθε παιχνίδι ασχέτως με το στυλ που έχει επιλέξει σε προηγούμενα παιχνίδια. Με συντηρητικό παιχνίδι, φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα $p_d > 0$, και χάνει με πιθανότητα $1 - p_d$.

Με τολμηρό παιχνίδι, κερδίζει με πιθανότητα p_w, και χάνει με πιθανότητα $1 - p_w$. Ο Boris πάντα παίζει τολμηρό παιχνίδι κατά τη διάρκεια Ξαφνικού Θανάτου, αλλά μπορεί να αλλάξει στυλ μεταξύ των παιχνιδιών 1 και 2.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα ότι ο Boris κερδίζει τον αγώνα για κάθε μία από τις παρακάτω στρατηγικές:

(i) Να παίζει τολμηρό παιχνίδι και στα δύο παιχνίδια 1 και 2.

(ii) Να παίζει συντηρητικό παιχνίδι και στα δύο παιχνίδια 1 και 2.

(iii) Να παίζει συντηρητικό παιχνίδι όποτε προηγείται στους πόντους και τολμηρό παιχνίδι διαφορετικά.

(β) Υποθέστε ότι $p_w < 1/2$, ώστε ο Boris είναι ο χειρότερος παίκτης, ασχέτως με το στυλ παιχνιδιού που υιοθετεί. Να δείξετε ότι με τη στρατηγική στην περίπτωση (iii) παραπάνω, υπάρχουν τιμές p_w και p_d, τέτοιες ώστε ο Boris μπορεί να έχει πιθανότητα πάνω από 0.5 να κερδίσει το παιχνίδι. Πως εξηγείται το πλεονέκτημα αυτό;

Πρόβλημα 18. Δύο παίκτες εναλλάσσονται στο να αφαιρούν μία μπάλα από ένα δοχείο το οποίο περιέχει m άσπρες και n μαύρες μπάλες. Ο πρώτος παίκτης που αφαιρεί μία άσπρη μπάλα κερδίζει. Να αναπτύξετε ένα αναδρομικό τύπο ο οποίος διευκολύνει τον υπολογισμό της πιθανότητας ότι ο αρχικός παίκτης κερδίζει.

Πρόβλημα 19. Καθένα από τα k δοχεία περιέχει m άσπρες και n μαύρες μπάλες. Μία μπάλα επιλέγεται τυχαία από το δοχείο 1 και μεταφέρεται στο δοχείο 2, ακολούθως μία μπάλα επιλέγεται από το 2 και μεταφέρεται στο 3, κ.ο.κ. Τελικά, μία μπάλα επιλέγεται τυχαία από το δοχείο k. Να δείξετε ότι η πιθανότητα η τελευταία μπάλα να είναι άσπρη είναι ίση με την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη, δηλαδή, είναι $m/(m+n)$.

Πρόβλημα 20. Έχουμε δύο δοχεία, που το καθένα περιέχει αρχικά n μπάλες. Εκτελούμε τέσσερις διαδοχικές αλλαγές μπάλας. Σε κάθε αλλαγή, διαλέγουμε συγχρόνως και τυχαία μία μπάλα από κάθε δοχείο και την τοποθετούμε στο άλλο δοχείο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι στο τέλος των τεσσάρων αλλαγών όλες οι μπάλες θα είναι στο δοχείο στο οποίο βρίσκονταν αρχικά;

Πρόβλημα 21. Το δίλημμα του φυλακισμένου. Δύο από τρεις φυλακισμένους πρόκειται να αφεθούν ελεύθεροι. Ο ένας από τους φυλακισμένους ρωτάει το φρουρό να του πει την ταυτότητα ενός φυλακισμένου εκτός από τον ίδιο που θα αφεθεί ελεύθερος. Ο φρουρός αρνείται με το παρακάτω σκεπτικό: σύμφωνα με ότι γνωρίζει μέχρι τώρα, η πιθανότητα να αφεθείς ελεύθερος είναι 2/3, αλλά μετά την απάντηση μου, η πιθανότητα να αφεθείς ελεύθερος θα γίνει 1/2, εφόσον θα υπάρχουν δύο φυλακισμένοι (συμπεριλαμβανομένου και του ιδίου) των οποίων η τύχη είναι άγνωστη και ακριβώς ένας από τους δύο θα αφεθεί ελεύθερος. Ποιο είναι το λάθος στον τρόπο συλλογισμού του φρουρού;

Πρόβλημα 22. Ένας γρίφος δύο φακέλων. Σας δίνουν δύο φακέλους και γνωρίζετε ότι

ο καθένας περιέχει ένα ποσό σε ευρώ, το οποίο είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και ότι τα δύο ποσά είναι διαφορετικά. Οι τιμές των δύο αυτών ποσών μοντελοποιούνται ως σταθερές και είναι άγνωστες. Χωρίς να γνωρίζετε ποια είναι τα ποσά, επιλέγετε τυχαία έναν από τους δύο φακέλους, και αφού κοιτάξετε το ποσό μέσα στο φάκελο, μπορείτε να αλλάξετε τους φακέλους εάν το επιθυμείτε. Ένας φίλος ισχυρίζεται ότι η παρακάτω στρατηγική θα αυξήσει σε πάνω από 1/2 την πιθανότητά σας να καταλήξετε με το φάκελο με το μεγαλύτερο ποσό: ρίξτε ένα νόμισμα επανειλημμένα, έστω ότι X ισούται με 1/2 συν τον αριθμό των ρίψεων που απαιτούνται για να έρθει κορώνα για πρώτη φορά και κάνετε ανταλλαγή εάν το ποσό στον φάκελο που επιλέξατε είναι μικρότερο από την τιμή της X. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του φίλου σας;

Πρόβλημα 23. Το παράδοξο της επαγωγής. Θεωρήστε μία δήλωση που δεν γνωρίζετε αν αληθεύει. Εφόσον παρατηρήσουμε πολλά παραδείγματα τα οποία είναι συμβατά με αυτή, μπαίνουμε στον πειρασμό να θεωρήσουμε τη δήλωση αυτή ως πιο πιθανή. Αναφερόμαστε σε τέτοιου είδους λογική ως *επαγωγικό συλλογισμό* (από φιλοσοφικής, παρά μαθηματικής άποψης). Θεωρήστε τώρα τη δήλωση "όλες οι αγελάδες είναι άσπρες." Μία ισοδύναμη δήλωση είναι "οτιδήποτε δεν είναι άσπρο δεν είναι αγελάδα." Τότε παρατηρούμε μερικά μαύρα κοράκια. Οι παρατηρήσεις μας είναι ξεκάθαρα συμβατές με την δήλωση, αλλά κάνουν την υπόθεση "όλες οι αγελάδες είναι άσπρες " πιο πιθανή;

Για να αναλύσουμε μία τέτοια κατάσταση, θεωρούμε ένα μοντέλο πιθανότητας. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο δυνατές καταστάσεις στον κόσμο τις οποίες μοντελοποιούμε ως συμπληρωματικά γεγονότα:

$$\begin{aligned} A &: \text{όλες οι αγελάδες είναι άσπρες,} \\ A^c &: 50\% \text{ όλων των αγελάδων είναι άσπρες.} \end{aligned}$$

Έστω p η πιθανότητα $\mathrm{P}(A)$, εκ των προτέρων γνωστή ότι όλες οι αγελάδες είναι άσπρες. Κάνουμε μία παρατήρηση μίας αγελάδας ή ενός κορακιού, με πιθανότητα q και $1-q$, αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το αν το γεγονός A συμβαίνει ή όχι. Υποθέστε ότι $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ και ότι όλα τα κοράκια είναι μαύρα.

(α) Δεδομένου του γεγονότος $B = \{$ένα μαύρο κοράκι παρατηρήθηκε$\}$, ποια είναι η $\mathrm{P}(A \mid B)$;

(β) Δεδομένου του γεγονότος $C = \{$μία άσπρη αγελάδα παρατηρήθηκε$\}$, ποια είναι η $\mathrm{P}(A \mid C)$;

Πρόβλημα 24.* Η παραλλαγή του θεωρήματος της δεσμευμένης συνολικής πιθανότητας. Να δείξετε την ταυτότητα

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(C \mid B)\mathrm{P}(A \mid B \cap C) + \mathrm{P}(C^c \mid B)\mathrm{P}(A \mid B \cap C^c),$$

υποθέτοντας ότι όλα τα υπό δέσμευση γεγονότα έχουν θετική πιθανότητα.

Λύση. Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το αξίωμα

της προσθετικότητας στα ξένα μεταξύ τους σύνολα $A \cap B \cap C$ και $A \cap B \cap C^c$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(C \mid B)\mathrm{P}(A \mid B \cap C) + \mathrm{P}(C^c \mid B)\mathrm{P}(A \mid B \cap C^c) \\
&\qquad = \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(B)} \cdot \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(B \cap C)} + \frac{\mathrm{P}(B \cap C^c)}{\mathrm{P}(B)} \cdot \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathrm{P}(B \cap C^c)} \\
&\qquad = \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathrm{P}(B)} \\
&\qquad = \frac{\mathrm{P}\big((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)\big)}{\mathrm{P}(B)} \\
&\qquad = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&\qquad = \mathrm{P}(A \mid B).
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 25.* Έστω ότι A και B είναι γεγονότα με $\mathrm{P}(A) > 0$ και $\mathrm{P}(B) > 0$. Λέμε ότι ένα γεγονός B *υποστηρίζει* ένα γεγονός A εάν $\mathrm{P}(A \mid B) > \mathrm{P}(A)$ και *δεν υποστηρίζει* το γεγονός A εάν $\mathrm{P}(A \mid B) < \mathrm{P}(A)$.

(α) Να δείξετε ότι το B υποστηρίζει το A εάν και μόνο εάν το A εισηγείται το B.

(β) Υποθέστε ότι η $\mathrm{P}(B^c) > 0$. Να δείξετε ότι το B υποστηρίζει το A εάν και μόνο εάν το B^c δεν υποστηρίζει το A.

(γ) Γνωρίζουμε ότι ένας θησαυρός βρίσκεται σε ένα από δύο μέρη, με πιθανότητες β και $1 - \beta$, αντίστοιχα, όπου $0 < \beta < 1$. Ψάχνουμε το πρώτο μέρος και εάν ο θησαυρός είναι εκεί, τον βρίσκουμε με πιθανότητα $p > 0$. Να δείξετε ότι το γεγονός να μη βρούμε το θησαυρό στο πρώτο μέρος υποστηρίζει ότι ο θησαυρός είναι στο δεύτερο μέρος.

Λύση. (α) Έχουμε $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$, άρα το B υποστηρίζει το A εάν και μόνο εάν $\mathrm{P}(A \cap B) > \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το A υποστηρίζει το B, λόγω συμμετρίας.

(β) Εφόσον $\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(B^c) = 1$, έχουμε

$$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A \mid B^c),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{P}(B^c)\big(\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \mid B^c)\big) = \mathrm{P}(B)\big(\mathrm{P}(A \mid B) - \mathrm{P}(A)\big).$$

Άρα, $\mathrm{P}(A \mid B) > \mathrm{P}(A)$ (B υποστηρίζει το A) εάν και μόνο εάν $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(A \mid B^c)$ (B^c δεν υποστηρίζει το A).

(γ) Έστω ότι A και B είναι τα γεγονότα

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{ο θησαυρός δεν είναι στο δεύτερο μέρος}\}, \\
B &= \{\text{δεν βρίσκουμε το θησαυρό στο πρώτο μέρος}\}.
\end{aligned}
$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας, έχουμε

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B \mid A^c) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) = \beta(1-p) + (1-\beta),$$

άρα

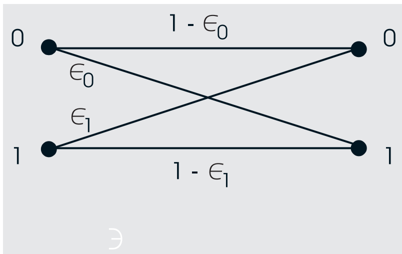
$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1-\beta}{\beta(1-p)+(1-\beta)} = \frac{1-\beta}{1-\beta p} > 1-\beta = \mathrm{P}(A).$$

Έπεται ότι το γεγονός B υποστηρίζει το γεγονός A.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5. Ανεξαρτησία

Πρόβλημα 26. Ένας κυνηγός έχει δύο σκύλους. Κάποια μέρα, στα ίχνη κάποιου ζώου, ο κυνηγός φτάνει σε ένα μέρος όπου ο δρόμος χωρίζει σε δύο μονοπάτια. Γνωρίζει ότι ο κάθε σκύλος, ανεξάρτητα από τον άλλο, θα επιλέξει το σωστό μονοπάτι με πιθανότητα p. Ο κυνηγός αποφασίζει να αφήσει κάθε σκύλο να επιλέξει ένα μονοπάτι και αν συμφωνούν, να πάρει το μονοπάτι αυτό, ενώ αν διαφωνούν, να επιλέξει τυχαία ένα μονοπάτι. Είναι η στρατηγική του καλύτερη από το να αφήσει απλώς έναν από τους σκύλους να αποφασίσει για το μονοπάτι;

Πρόβλημα 27. Επικοινωνία μέσω ενός θορυβώδους καναλιού. Ένα δυαδικό (0 ή 1) σύμβολο το οποίο αποστέλλεται μέσω ενός θορυβώδους καναλιού επικοινωνίας λαμβάνεται λάθος με πιθανότητα ϵ_0 και ϵ_1, αντίστοιχα (βλ. Σχ. 1.18). Τα λάθη συμβόλων σε διαφορετικές αποστολές είναι ανεξάρτητα.



Σχήμα 1.18: Πιθανότητες λάθους σε ένα δυαδικό κανάλι επικοινωνίας.

(α) Υποθέστε ότι η πηγή του καναλιού αποστέλλει ένα 0 με πιθανότητα p και ένα 1 με πιθανότητα $1-p$. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο σύμβολο λαμβάνεται σωστά;

(β) Υποθέστε ότι μία ακολουθία συμβόλων 1011 αποστέλλεται. Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλα τα σύμβολα λαμβάνονται σωστά;

(γ) Σε μία προσπάθεια να βελτιώσουμε την αξιοπιστία, κάθε σύμβολο αποστέλλεται τρεις φορές και το αποστελλόμενο σύμβολο αποκωδικοποιείται με τον κανόνα της πλειονότητας. Με άλλα λόγια, ένα 0 (ή 1) αποστέλλεται ως 000 (ή 111, αντίστοιχα)

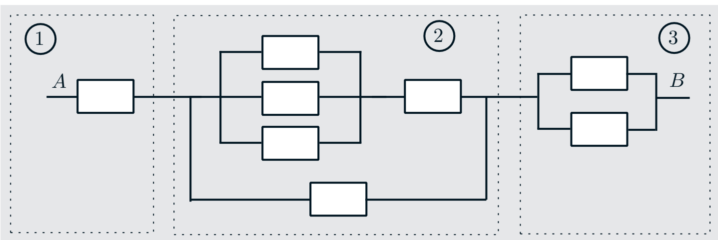
και αποκωδικοποιείται στον δέκτη με 0 (ή 1) εάν και μόνο εάν η λαμβανόμενη ακολουθία τριών συμβόλων περιέχει τουλάχιστον δύο 0 (ή 1, αντίστοιχα). Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα αποστελλόμενο 0 αποκωδικοποιείται σωστά;

(δ) Υποθέστε ότι μία πηγή αποστέλλει ένα 0 με πιθανότητα p και ένα 1 με πιθανότητα $1 - p$ και ότι χρησιμοποιείται η μέθοδος του μέρους (γ). Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα 0 έχει αποσταλεί δεδομένου ότι η λαμβανόμενη σειρά είναι 101;

Πρόβλημα 28. Το αδέλφι του βασιλιά. Ο βασιλιάς έχει ένα αδέλφι. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το αδέλφι είναι αδελφός; Υποθέστε ότι κάθε γέννα έχει σαν αποτέλεσμα ένα αγόρι με πιθανότητα 1/2, ανεξάρτητα από άλλες γέννες. Να είστε προσεκτικοί στη διατύπωση οποιωνδήποτε άλλων υποθέσεων που έχετε να κάνετε για να φθάσετε σε μία απάντηση.

Πρόβλημα 29. Χρήση ενός προκατειλημμένου νομίσματος για να πάρουμε μία μη προκατειλημμένη απόφαση. Η Αλίκη και ο Δημήτρης θέλουν να αποφασίσουν να πάνε στην όπερα ή στον κινηματογράφο με τη ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος. Δυστυχώς, το μόνο διαθέσιμο νόμισμα είναι προκατειλημμένο (ενώ η προκατάληψη του δεν είναι ακριβώς γνωστή). Πως μπορούν να χρησιμοποιήσουν το προκατειλημμένο νόμισμα για να πάρουν μία απόφαση έτσι ώστε οποιαδήποτε επιλογή (όπερα ή κινηματογράφος) να επιλέγεται ισοπίθανα;

Πρόβλημα 30. Ένα ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται από όμοια στοιχεία τα οποία είναι λειτουργικά με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από άλλα στοιχεία. Τα στοιχεία συνδέονται σε τρία υποσυστήματα, όπως φαίνονται στο Σχ. 1.19. Το σύστημα λειτουργεί εάν υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο αρχίζει από το σημείο A, τελειώνει στο σημείο B και αποτελείται από λειτουργικά στοιχεία. Ισοδύναμα απαιτούμε όλα τα υποσυστήματα να είναι λειτουργικά. Ποιες είναι οι πιθανότητες και τα τρία υποσυστήματα, όπως και ολόκληρο το σύστημα, να είναι λειτουργικά;



Σχήμα 1.19: Ένα σύστημα από όμοια λειτουργικά στοιχεία αποτελείται από τρία υποσυστήματα 1, 2 και 3. Το σύστημα είναι λειτουργικό εάν υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο αρχίζει από το σημείο A, και καταλήγει στο σημείο B και αποτελείται από λειτουργικά στοιχεία.

Πρόβλημα 31. Αξιοπιστία ενός k-από-n συστήματος. Ένα σύστημα αποτελείται από n ακριβώς ίδια στοιχεία τα οποία είναι λειτουργικά με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από άλλα

στοιχεία. Το σύστημα λειτουργεί εάν τουλάχιστον k από τα n στοιχεία είναι λειτουργικά. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το σύστημα είναι λειτουργικό;

Πρόβλημα 32. Μία ηλεκτρική εταιρεία έχει τη δυνατότητα να παρέχει ηλεκτρισμό σε μία πόλη προερχόμενο από n διαφορετικά εργοστάσια. Το εργοστάσιο i βγαίνει εκτός λειτουργίας με πιθανότητα p_i, ανεξάρτητα από τα άλλα εργοστάσια.

(α) Υποθέστε ότι οποιοδήποτε εργοστάσιο έχει τη δυνατότητα να παράγει αρκετό ηλεκτρισμό ώστε να υποστηρίξει ολόκληρη την πόλη. Ποια είναι η πιθανότητα η πόλη να έχει γενική διακοπή ρεύματος;

(β) Υποθέστε ότι δύο εργοστάσια είναι απαραίτητα για να αποφύγουμε γενική διακοπή ρεύματος. Ποια είναι η πιθανότητα η πόλη να έχει γενική διακοπή ρεύματος.

Πρόβλημα 33. Ένα κυψελοειδές σύστημα κινητής τηλεφωνίας υποστηρίζει n_1 "χρήστες φωνής " (αυτούς που σποραδικά χρειάζονται σύνδεση φωνής) και n_2 "χρήστες δεδομένων" (αυτούς που σποραδικά χρειάζονται σύνδεση δεδομένων). Εκτιμούμε ότι σε κάποιο δεδομένο χρόνο, κάθε χρήστης χρειάζεται να είναι συνδεδεμένος στο σύστημα με πιθανότητα p_1 (για χρήστες φωνής) ή p_2 (για χρήστες δεδομένων), ανεξάρτητα από άλλους χρήστες. Ο ρυθμός δεδομένων για φωνή είναι r_1 bits/δευτερόλεπτο ενώ για δεδομένα είναι r_2 bits/δευτερόλεπτο. Το σύστημα κινητής τηλεφωνίας έχει συνολική χωρητικότητα c bits/δευτερόλεπτο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι περισσότεροι χρήστες θέλουν να χρησιμοποιήσουν το σύστημα από όσους το σύστημα έχει τη δυνατότητα να εξυπηρετήσει;

Πρόβλημα 34. Το πρόβλημα των πόντων. Ο Τέλης και η Μελίνα παίζουν ένα παιχνίδι γκολφ (18 τρύπες) για ένα στοίχημα 10 ευρώ, και οι πιθανότητες τους να κερδίσουν οποιαδήποτε από τις τρύπες είναι p και $1-p$, αντίστοιχα, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματά τους σε οποιεσδήποτε άλλες τρύπες. Στο τέλος των 10 τρυπών, με το σκορ να είναι 4 στα 6 υπέρ της Μελίνα, ο Τέλης παίρνει ένα επείγον τηλεφώνημα και πρέπει να παρουσιαστεί πίσω στη δουλειά του. Αποφασίζουν να μοιράσουν το στοίχημα σύμφωνα με τις πιθανότητες τους να το κερδίσουν σαν να το είχαν τελειώσει, ως εξής. Εάν p_T και p_W είναι οι πιθανότητες ότι ο Τέλης και η Μελίνα, αντίστοιχα, προηγούνται στο σκορ μετά από 18 τρύπες δεδομένου του 4-6 σκορ μετά από 10 τρύπες, τότε ο Τέλης πρέπει να πάρει ένα κλάσμα $p_T/(p_T+p_W)$ του στοιχήματος, και η Μελίνα πρέπει να πάρει το υπόλοιπο $p_W/(p_T+p_W)$. Πόσα χρήματα πρέπει να πάρει ο Τέλης; *Σημείωση*: Αυτό είναι ένα παράδειγμα, του επονομαζόμενου, παιχνιδιού των πόντων, το οποίο έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας πιθανότητας. Το πρόβλημα ετέθη από τον Chevalier de Méré τον 17ο αιώνα στον Pascal, ο οποίος εισήγαγε την ιδέα ότι το κέρδος ενός παιχνιδιού που διεκόπη θα πρέπει να μοιραστεί ανάλογα με τη δεσμευμένη πιθανότητα κέρδους δεδομένης της κατάστασης του παιχνιδιού στο χρόνο διακοπής του. Ο Pascal ανέλυσε κάποιες ειδικές περιπτώσεις και μέσω αλληλογραφίας με τον Fermat, έδωσε το έναυσμα για πολλές περαιτέρω αναλύσεις.

Πρόβλημα 35. Μία συγκεκριμένη τάξη έχει ιστορία χαμηλής προσέλευσης. Η καθηγήτρια που ενοχλήθηκε αποφασίζει ότι δεν θα κάνει μάθημα παρά μόνο εάν τουλάχιστον

k από τους n γραμμένους φοιτητές στο μάθημα είναι παρόντες. Κάθε φοιτητής θα εμφανιστεί ανεξάρτητα στο μάθημα με πιθανότητα p_g εάν ο καιρός είναι καλός και με πιθανότητα p_b εάν ο καιρός είναι κακός. Δεδομένης της πιθανότητας κακού καιρού μία δεδομένη μέρα, να υπολογίσετε την πιθανότητα η καθηγήτρια να διδάξει τη μέρα αυτή.

Πρόβλημα 36. Θεωρήστε τη ρίψη ενός νομίσματος το οποίο είναι κορώνα με πιθανότητα p και γράμματα με πιθανότητα $1-p$. Έστω q_n η πιθανότητα ότι μετά από n ανεξάρτητες ρίψεις, έχουμε έναν άρτιο αριθμό κορωνών. Να αποδείξετε την αναδρομική σχέση η οποία συσχετίζει το q_n με το q_{n-1}, να τη λύσετε και να επιβεβαιώσετε τον τύπο

$$q_n = \big(1 + (1-2p)^n\big)/2.$$

Πρόβλημα 37.* Η χρεωκοπία του παίκτη. Ένας παίκτης βάζει μία σειρά από ανεξάρτητα στοιχήματα. Σε κάθε στοίχημα, κερδίζει 1 ευρώ με πιθανότητα p και χάνει 1 ευρώ με πιθανότητα $1-p$. Αρχικά, ο παίκτης έχει k ευρώ και παίζει μέχρι είτε να μαζέψει n ευρώ είτε να μην έχει καθόλου χρήματα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο παίκτης θα καταλήξει με n ευρώ;

Λύση. Ας δηλώσουμε με A το γεγονός ότι θα καταλήξει με n ευρώ και με F το γεγονός ότι κερδίζει το πρώτο στοίχημα. Δηλώνουμε επίσης με w_k την πιθανότητα του γεγονότος A, εάν αρχίσει με k ευρώ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας, έχουμε

$$w_k = \mathrm{P}(A \mid F)\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(A \mid F^c)\mathrm{P}(F^c) = p\mathrm{P}(A \mid F) + q\mathrm{P}(A \mid F^c), \qquad 0 < k < n,$$

όπου $q = 1-p$. Λόγω της ανεξαρτησίας των προηγούμενων και μελλοντικών στοιχημάτων, αφού κερδίσει το πρώτο στοίχημα είναι το ίδιο σαν να αρχίζει τώρα αλλά με k+1 ευρώ, έτσι ώστε $\mathrm{P}(A \mid F) = w_{k+1}$ και παρόμοια $\mathrm{P}(A \mid F^c) = w_{k-1}$. Άρα, έχουμε $w_k = pw_{k+1} + qw_{k-1}$, το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$w_{k+1} - w_k = r(w_k - w_{k-1}), \qquad 0 < k < n,$$

όπου $r = q/p$. Θα λύσουμε για το w_k σαν συνάρτηση των p και q χρησιμοποιώντας αναδρομή και τις οριακές τιμές $w_0 = 0$ και $w_n = 1$.

Έχουμε $w_{k+1} - w_k = r^k(w_1 - w_0)$ και εφόσον $w_0 = 0$,

$$w_{k+1} = w_k + r^k w_1 = w_{k-1} + r^{k-1}w_1 + r^k w_1 = w_1 + rw_1 + \cdots + r^k w_1.$$

Το άθροισμα στη δεξιά πλευρά υπολογίζεται ξεχωριστά για τις δύο περιπτώσεις, όπου $r = 1$ (ή $p = q$) και $r \neq 1$ (ή $p \neq q$). Έχουμε

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{1-r^k}{1-r} w_1, & \text{εάν } p \neq q, \\ kw_1, & \text{εάν } p = q. \end{cases}$$

Εφόσον $w_n = 1$, μπορούμε να λύσουμε ως προς w_1 και επομένως ως προς w_k:

$$w_1 = \begin{cases} \dfrac{1-r}{1-r^n}, & \text{εάν } p \neq q, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{εάν } p = q, \end{cases}$$

έτσι ώστε

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{1-r^k}{1-r^n}, & \text{εάν } p \neq q, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{εάν } p = q. \end{cases}$$

Πρόβλημα 38.* Έστω A και B δύο ανεξάρτητα γεγονότα. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ανεξαρτησίας για να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Τα γεγονότα A και B^c είναι ανεξάρτητα.

(β) Τα γεγονότα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

Λύση. (α) Το γεγονός A είναι η ένωση των δύο ξένων μεταξύ τους γεγονότων $A \cap B^c$ και $A \cap B$. Αν χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της προσθετικότητας και την ανεξαρτησία των A και B, έχουμε

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \cap B^c).$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A)\big(1 - \mathrm{P}(B)\big) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c),$$

άρα τα A και B^c είναι ανεξάρτητα.

(β) Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του μέρους (α) δύο φορές: πρώτα στο A και B και μετά στο B^c και A.

Πρόβλημα 39.* Έστω A, B και C ανεξάρτητα γεγονότα, με $\mathrm{P}(C) > 0$. Να αποδείξετε ότι το A και B είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητα δεδομένου του C.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cap B \,|\, C) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(A \,|\, C)\mathrm{P}(B \,|\, C), \end{aligned}$$

άρα A και B είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητα δεδομένου του C. Στον προηγούμενο υπολογισμό, η πρώτη ισότητα χρησιμοποιεί τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας· η δεύτερη χρησιμοποιεί την ανεξαρτησία που υποθέτουμε· η τέταρτη χρησιμοποιεί την ανεξαρτησία του A από το C, και του B από το C.

Πρόβλημα 40.* Υποθέστε ότι τα γεγονότα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι ανεξάρτητα και ότι η $\mathrm{P}(A_3 \cap A_4) > 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \,|\, A_3 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2).$$

Λύση. Έχουμε

$$\mathrm{P}(A_1 \mid A_3 \cap A_4) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4)}{\mathrm{P}(A_3 \cap A_4)} = \frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_4)} = \mathrm{P}(A_1).$$

Παρόμοια, έχουμε ότι $\mathrm{P}(A_2 \mid A_3 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_2)$ και $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \mid A_3 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ και τελικά,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cap A_4) &= \mathrm{P}(A_1 \mid A_3 \cap A_4) + \mathrm{P}(A_2 \mid A_3 \cap A_4) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \mid A_3 \cap A_4)\\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)\\ &= \mathrm{P}(A_1 \cup A_2).\end{aligned}$$

Πρόβλημα 41.* Ο κανόνας διαδοχής του Laplace. Θεωρήστε $m+1$ κουτιά με το k-οστό κουτί να περιέχει k κόκκινες μπάλες και $m-k$ άσπρες μπάλες, όπου το k κυμαίνεται μεταξύ 0 και m. Επιλέγουμε ένα κουτί τυχαία (όλα τα κουτιά είναι ισοπίθανα) και επιλέγουμε μία μπάλα τυχαία από το κουτί αυτό, n διαδοχικές φορές (η μπάλα που ανασύρουμε αντικαθίσταται κάθε φορά, και κάθε καινούργια μπάλα επιλέγεται ανεξάρτητα). Υποθέστε ότι τραβάμε μία κόκκινη μπάλα σε κάθε μία από τις n φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ότι εάν τραβήξουμε μία ακόμα μπάλα ότι αυτή θα είναι κόκκινη; Να εκτιμήσετε την πιθανότητα για μεγάλο m.

Λύση. Θέλουμε να βρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $\mathrm{P}(E \mid R_n)$, όπου E είναι το γεγονός ότι ανασύραμε μία κόκκινη μπάλα την $n+1$ φορά και R_n είναι το γεγονός ότι μία κόκκινη μπάλα ανασύρθηκε σε καθεμία από τις n προηγούμενες φορές. Διαισθητικά, η συνεχής ανάσυρση μίας κόκκινης μπάλας δείχνει ότι έχει επιλεγεί ένα κουτί με μεγάλο ποσοστό από κόκκινες μπάλες, άρα περιμένουμε ότι η $\mathrm{P}(E \mid R_n)$ είναι πιο κοντά στο 1 παρά στο 0. Πράγματι, ο Laplace χρησιμοποίησε το παράδειγμα αυτό, για να υπολογίσει την πιθανότητα ότι ο ήλιος θα ανατείλει αύριο δεδομένου ότι ανέτειλε τα προηγούμενα 5,000 χρόνια. (Δεν είναι ξεκάθαρο πόσο σοβαρός ήταν ο Laplace για τον υπολογισμό αυτό, αλλά η ιστορία αυτή είναι μέρος της παράδοσης της θεωρίας πιθανότητας.)

Έχουμε

$$\mathrm{P}(E \mid R_n) = \frac{\mathrm{P}(E \cap R_n)}{\mathrm{P}(R_n)},$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_n) &= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(\text{ το } k\text{-όστο κουτί επιλέγεται }) \left(\frac{k}{m}\right)^n = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n,\\ \mathrm{P}(E \cap R_n) &= \mathrm{P}(R_{n+1}) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Για μεγάλο m, θεωρούμε την $\mathrm{P}(R_n)$ ως μία κατά τμήματα σταθερή προσέγγιση ενός ολοκληρώματος:

$$\mathrm{P}(R_n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^n \approx \frac{1}{(m+1)m^n}\int_0^m x^n dx = \frac{1}{(m+1)m^n}\cdot\frac{m^{n+1}}{n+1} \approx \frac{1}{n+1}.$$

Παρομοίως,

$$\mathrm{P}(E \cap R_n) = \mathrm{P}(R_{n+1}) \approx \frac{1}{n+2},$$

έτσι ώστε

$$\mathrm{P}(E \,|\, R_n) \approx \frac{n+1}{n+2}.$$

Άρα, για μεγάλο m, η ανάσυρση μίας ακόμα κόκκινης μπάλας είναι σχεδόν σίγουρη όταν το n είναι μεγάλο.

Πρόβλημα 42.* Ο τύπος του διωνυμικού συντελεστή και το τρίγωνο του Pascal.

(α) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του $\binom{n}{k}$ ως τον αριθμό των διαφορετικών ακολουθιών n ρίψεων με k κορώνες, για να αποδείξετε την αναδρομή που προτείνεται από το επονομαζόμενο τρίγωνο του Pascal, το οποίο δίνεται στο Σχ. 1.20.

(β) Χρησιμοποιήστε την αναδρομή που αποδείχτηκε στο μέρος (α) και επαγωγή, για να αποδείξετε τον τύπο

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

Σχήμα 1.20: Μέθοδος σειριακού υπολογισμού των διωνυμικών συντελεστών χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal. Κάθε όρος $\binom{n}{k}$ στην τριγωνική διάταξη στα αριστερά υπολογίζεται και τοποθετείται στην τριγωνική διάταξη στα δεξιά προσθέτοντας τους δύο γείτονες στη γραμμή πάνω από αυτή (εκτός από τους οριακούς όρους με $k = 0$ και $k = n$, οι οποίοι ισούνται με 1).

Λύση. (α) Παρατηρήστε ότι μπορούμε να έχουμε μία ακολουθία n ρίψεων που περιέχει k κορώνες (για $0 < k < n$) με δύο τρόπους:

(1) Αν αρχίσουμε με μία ακολουθία $(n-1)$ ρίψεων η οποία περιέχει k κορώνες και ας προσθέσουμε γράμματα στο τέλος. Υπάρχουν $\binom{n-1}{k}$ διαφορετικές τέτοιου τύπου ακολουθίες.

(2) Αν αρχίσουμε με την ακολουθία $(n-1)$ ρίψεων η οποία περιέχει $k-1$ κορώνες και προσθέσουμε μία κορώνα στο τέλος. Υπάρχουν $\binom{n-1}{k-1}$ διαφορετικές τέτοιου τύπου ακολουθίες.

Άρα

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, & \text{εάν } k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{εάν } k = 0, n. \end{cases}$$

Αυτός είναι ο τύπος που αντιστοιχεί στον υπολογισμό του τριγώνου του Pascal και ο οποίος δίνεται στο Σχ. 1.20.

(β) Χρησιμοποιούμε την αναδρομή του μέρους (α), για να αποδείξουμε τον τύπο

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

με επαγωγή ως προς το n. Πράγματι, έχουμε από τον ορισμό $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, άρα, για $n = 1$ ο παραπάνω τύπος ισχύει εφόσον χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $0! = 1$. Εάν ο τύπος ισχύει για κάθε δείκτη μέχρι το $n-1$, έχουμε για $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\ &= \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \end{aligned}$$

και η επαγωγή ολοκληρώνεται.

Πρόβλημα 43.* Το λήμμα του Borel-Cantelli. Θεωρήστε μία άπειρη ακολουθία από επαναλήψεις. Η πιθανότητα επιτυχίας στην i-οστή επανάληψη είναι κάποιος θετικός αριθμός p_i. Έστω N το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμμία επιτυχία και έστω I το γεγονός ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός επιτυχιών.

(α) Υποθέστε ότι οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες και ότι το $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$. Να δείξετε ότι $\mathrm{P}(N) = 0$ και $\mathrm{P}(I) = 1$.

(β) Υποθέστε ότι το $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$. Να δείξετε ότι $\mathrm{P}(I) = 0$.

Λύση. (α) Το γεγονός N είναι ένα υποσύνολο του γεγονότος ότι δεν υπάρχουν επιτυχίες στις πρώτες n επαναλήψεις, έτσι ώστε

$$\mathrm{P}(N) \le \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Αν πάρουμε λογαρίθμους, έχουμε

$$\log \mathrm{P}(N) \leq \sum_{i=1}^{n} \log(1-p_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(-p_i).$$

Αν πάρουμε το όριο καθώς το n τείνει στο άπειρο, έχουμε $\log \mathrm{P}(N) = -\infty$, ή $\mathrm{P}(N) = 0$.

Έστω τώρα το γεγονός L_n ότι υπάρχει ένας αριθμός επιτυχιών και ότι η τελευταία επιτυχία συμβαίνει στην n-οστή επανάληψη. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα που έχουμε ήδη αποδείξει $\mathrm{P}(N) = 0$ και το εφαρμόζουμε στην ακολουθία των επαναλήψεων μετά την n-οστή επανάληψη, για να πάρουμε $\mathrm{P}(L_n) = 0$. Το γεγονός I^c (πεπερασμένος αριθμός επιτυχιών) είναι η ένωση των ξένων μεταξύ τους γεγονότων L_n, $n \geq 1$, και N, έτσι ώστε η

$$\mathrm{P}(I^c) = \mathrm{P}(N) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(L_n) = 0,$$

και $\mathrm{P}(I) = 1$.

(β) Έστω S_i το γεγονός ότι η i-οστή επανάληψη είναι επιτυχής. Καθορίστε κάποιο αριθμό n και για κάθε $i > n$, έστω F_i το γεγονός ότι η πρώτη επιτυχία μετά τη φορά n συμβαίνει στην φορά i. Παρατηρήστε ότι $F_i \subset S_i$. Τελικά, έστω ότι A_n είναι το γεγονός να υπάρχει μία τουλάχιστον επιτυχία μετά από χρόνο n. Παρατηρήστε ότι $I \subset A_n$, επειδή ένας άπειρος αριθμός επιτυχιών συνεπάγεται ότι υπάρχουν επιτυχίες που ακολουθούν την επανάληψη n. Επιπλέον, το γεγονός A_n είναι η ένωση των ξένων μεταξύ τους γεγονότων F_i, $i > n$. Άρα,

$$\mathrm{P}(I) \leq \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(F_i) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(S_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i.$$

Παίρνουμε το όριο και από τις δύο πλευρές όπως το $n \to \infty$. Λόγω της υπόθεσης $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$, η δεξιά πλευρά συγκλίνει στο μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathrm{P}(I) = 0$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.6. Αρίθμηση

Πρόβλημα 44. Ο γρίφος του de Méré. Ένα εξάπλευρο ζάρι ρίχνεται τρεις φορές ανεξάρτητα. Ποιο είναι το πιο πιθανό: ένα άθροισμα ίσο με 11 ή ένα άθροισμα ίσο με 12; (Το ερώτημα αυτό τέθηκε από τον ευγενή de Méré στο φίλο του Pascal τον 17ο αιώνα.)

Πρόβλημα 45. Το πρόβλημα των γενεθλίων. Θεωρήστε n άτομα τα οποία παρίστανται σε ένα πάρτυ. Υποθέτουμε ότι κάθε άτομο έχει ίση πιθανότητα να έχει γεννηθεί οποιαδήποτε μέρα του χρόνου, ανεξάρτητα από οποιοδήποτε άλλο άτομο, και αγνοήστε τα δίσεκτα έτη (δηλαδή, υποθέστε ότι κανείς δεν γεννιέται στις 29 Φεβρουαρίου). Ποια είναι η πιθανότητα ότι κάθε άτομο έχει διαφορετικά γενέθλια;

Πρόβλημα 46. Ένα δοχείο περιέχει m κόκκινες και n άσπρες μπάλες.

(α) Ανασύρουμε δύο μπάλες τυχαία και συγχρόνως. Περιγράψτε το δειγματικό χώρο και υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι επιλεγμένες μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα, χρησιμοποιώντας δύο μεθόδους: μία μέθοδο αρίθμησης βασισμένη στο διακριτό ομοιόμορφο νόμο και μία σειριακή μέθοδο βασισμένη στο νόμο του πολλαπλασιασμού.

(β) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο 3-έδρο ζάρι του οποίου οι πλευρές είναι 1,2,3 και αν έρθει k, αποσύρουμε k μπάλες από το δοχείο τυχαία και τις βάζουμε κατά μέρος. Περιγράψτε το δειγματικό χώρο και υπολογίστε την πιθανότητα ότι όλες οι μπάλες που ανασύρθηκαν είναι κόκκινες, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο “διαίρει και βασίλευε” και το θεώρημα της συνολικής πιθανότητας.

Πρόβλημα 47. Κάνουμε παιχνίδι με μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι το 13ο χαρτί είναι ο πρώτος βαλές που εμφανίζεται.

Πρόβλημα 48. Ενενήντα φοιτητές, συμπεριλαμβανομένου του Γιάννη και της Μαρίας, πρόκειται να χωριστούν σε τρεις τάξεις ίδιου μεγέθους και αυτό θα γίνει με τυχαίο τρόπο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Γιάννης και η Μαρία θα καταλήξουν στην ίδια τάξη;

Πρόβλημα 49. Είκοσι διαφορετικά αυτοκίνητα παρκάρουν στον ίδιο χώρο παρκαρίσματος κάθε μέρα. Δέκα από αυτά κατασκευάζονται στην Αμερική, ενώ τα υπόλοιπα κατασκευάζονται σε άλλες χώρες. Ο χώρος παρκαρίσματος έχει ακριβώς είκοσι θέσεις, όλες σε μία σειρά, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να παρκάρουν το ένα δίπλα στο άλλο. Ωστόσο, οι οδηγοί έχουν διαφορετικά προγράμματα, και επομένως η θέση παρκαρίσματος του οποιοδήποτε αυτοκίνητο μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποια μέρα είναι τυχαία.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα αυτοκίνητα να παρκάρουν;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα τα αυτοκίνητα να εναλλάσσονται (δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα στην Αμερική δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο και δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα σε άλλες χώρες δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο);

Πρόβλημα 50. Οκτώ πύργοι τοποθετούνται σε διαφορετικά τετράγωνα μίας σκακιέρας 8×8, με όλες τις δυνατές τοποθετήσεις να είναι ισοπίθανες. Να βρείτε την πιθανότητα ότι όλοι οι πύργοι είναι ασφαλείς ο ένας από τον άλλο, δηλαδή, δεν υπάρχει γραμμή ή στήλη με παραπάνω από ένα πύργο.

Πρόβλημα 51. Ένα ακαδημαϊκό τμήμα προσφέρει 8 μαθήματα χαμηλού επιπέδου: $\{L_1, L_2, \ldots, L_8\}$ και 10 μαθήματα υψηλού επιπέδου: $\{H_1, H_2, \ldots, H_{10}\}$. Ένα έγκυρο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από 4 χαμηλού επιπέδου μαθήματα, και 3 υψηλού επιπέδου μαθήματα.

(α) Πόσα διαφορετικά προγράμματα σπουδών είναι δυνατά;

(β) Υποθέστε ότι $\{H_1, \ldots, H_5\}$ έχουν το L_1 ως προαπαιτούμενο μάθημα, και τα $\{H_6, \ldots H_{10}\}$ έχουν το L_2 και L_3 ως προαπαιτούμενα, δηλαδή, οποιοδήποτε πρόγραμμα

σπουδών το οποίο περιέχει, ας πούμε, ένα από τα $\{H_1, \ldots, H_5\}$ πρέπει επίσης να περιέχει το L_1. Πόσα διαφορετικά προγράμματα σπουδών υπάρχουν;

Πρόβλημα 52. Πόσες προτάσεις 6 λέξεων μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας καθένα από τα 26 γράμματα της αλφαβήτου (αγγλικό αλφάβητο) ακριβώς μία φορά; Μία λέξη ορίζεται ως μία μη κενή (πιθανόν ακαταλαβίστικη) ακολουθία γραμμάτων.

Πρόβλημα 53. Θεωρήστε μία ομάδα n ατόμων. Ένα κλαμπ αποτελείται από ένα ειδικό άτομο της ομάδας (τον αρχηγό του κλαμπ) και έναν αριθμό (πιθανώς μηδέν) επιπλέον μέλη του κλαμπ.

(α) Εξηγήστε γιατί το πλήθος των δυνατών κλαμπ είναι $n2^{n-1}$.

(β) Να βρείτε έναν εναλλακτικό τρόπο να αριθμήσετε τον αριθμό των δυνατών κλαμπ και να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Πρόβλημα 54. Τραβάμε τα πρώτα 7 χαρτιά μίας καλά ανακατεμένης τράπουλας 52 χαρτιών. Να βρείτε την πιθανότητα ότι:

(α) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

(β) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

(γ) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες.

Πρόβλημα 55. Ένας χώρος παρκαρίσματος περιέχει 100 αυτοκίνητα, από τα οποία k είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε m από αυτά στην τύχη και κάνουμε έλεγχο οδήγησης. Να βρείτε την πιθανότητα ότι n από τα αυτοκίνητα που ελέγξαμε είναι ελαττωματικά.

Πρόβλημα 56. Μία καλά ανακατωμένη τράπουλα 52 χαρτιών μοιράζεται σε 4 παίκτες. Να βρείτε την πιθανότητα ότι καθένας από τους παίκτες τραβάει έναν άσσο.

Πρόβλημα 57.* Υπεργεωμετρικές πιθανότητες. Ένα δοχείο περιέχει n μπάλες, από τις οποίες οι m είναι κόκκινες. Επιλέγουμε k μπάλες στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση (δηλαδή, οι επιλεγμένες μπάλες δεν μπαίνουν πίσω στο δοχείο πριν την επόμενη επιλογή). Ποια είναι η πιθανότητα ότι i από τις επιλεγμένες μπάλες είναι κόκκινες;

Λύση. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τους $\binom{n}{k}$ διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε k από τις διαθέσιμες μπάλες. Για να συμβεί το γεγονός που μας ενδιαφέρει, έχουμε να επιλέξουμε i από τις κόκκινες μπάλες m, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{m}{i}$ τρόπους και επίσης να επιλέξουμε $k - i$ από τις $n - m$ μπλε μπάλες, το οποίο

μπορεί να γίνει με $\binom{n-m}{k-i}$ τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\dbinom{m}{i}\dbinom{n-m}{k-i}}{\dbinom{n}{k}},$$

για κάθε $i \geq 0$ που ικανοποιεί $i \leq m$, $i \leq k$ και $k - i \leq n - m$. Για όλα τα άλλα i, η πιθανότητα είναι μηδέν.

Πρόβλημα 58.* Διόρθωση του αριθμού των μεταθέσεων αντικειμένων που δεν ξεχωρίζουν. Όταν μεταθέτουμε n αντικείμενα, μερικά από τα οποία είναι του ίδιου τύπου μεταξύ τους, διαφορετικές μεταθέσεις ενδέχεται να οδηγήσουν σε ακολουθίες αντικειμένων που δεν ξεχωρίζουν, άρα ο αριθμός των ακολουθιών που ξεχωρίζουν είναι $n!$. Για παράδειγμα, υπάρχουν 6 μεταθέσεις γραμμάτων A, B και C:

$$\text{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA},$$

αλλά μόνο τρεις ακολουθίες που ξεχωρίζουν και μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας τα γράμματα A, D και D:

$$\text{ADD, DAD, DDA}.$$

(α) Υποθέστε ότι k από n αντικείμενα δεν ξεχωρίζουν. Να δείξετε ότι το πλήθος των ακολουθιών αντικειμένων που ξεχωρίζουν είναι $n!/k!$.

(β) Υποθέστε ότι υπάρχουν r τύποι αντικειμένων που δεν ξεχωρίζουν και για κάθε i, k_i αντικείμενα είναι τύπου i. Να δείξετε ότι το πλήθος των αντικειμένων που ξεχωρίζουν είναι

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}.$$

Λύση. (α) Κάθε μία από τις $n!$ μεταθέσεις αντιστοιχεί σε $k!$ πανομοιότυπες ακολουθίες τις οποίες παίρνουμε μεταθέτοντας k αντικείμενα που δεν ξεχωρίζουν. Άρα, οι $n!$ μεταθέσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $n!/k!$ ομάδες των $k!$ μεταθέσεων που δεν ξεχωρίζουν. Άρα το πλήθος των ακολουθιών που ξεχωρίζουν είναι $n!/k!$. Για παράδειγμα, τα τρία γράμματα A, D και D δίνουν $3! = 6$ μεταθέσεις

$$\text{ADD, ADD, DAD, DDA, DAD, DDA},$$

που παίρνουμε αντικαθιστώντας το B και C με το D στις μεταθέσεις των A, B, και C που δόθηκαν νωρίτερα. Επομένως, οι 6 αυτές μεταθέσεις μπορούν να διαιρεθούν σε $n!/k! = 3!/2! = 3$ ομάδες

$$\{\text{ADD, ADD}\},\ \{\text{DAD, DAD}\},\ \{\text{DDA, DDA}\},$$

όπου κάθε ομάδα έχει $k! = 2! = 2$ μεταθέσεις που δεν ξεχωρίζουν.

(β) Μία λύση είναι να επεκτείνουμε το επιχείρημα στο (α) παραπάνω: για κάθε αντικείμενο τύπου i, υπάρχουν $k_i!$ μεταθέσεις αντικειμένων των k_i αντικειμένων που δεν ξεχωρίζουν. Άρα, κάθε μετάθεση ανήκει σε μία ομάδα από $k_1!\,k_2!\cdots k_r!$ μεταθέσεις που δεν ξεχωρίζουν, οι οποίες δίνουν όλες την ίδια ακολουθία αντικειμένων.

Ένα εναλλακτικό επιχείρημα έχει ως εξής. Η επιλογή μίας ακολουθίας αντικειμένων που ξεχωρίζουν αντιστοιχεί στο να αρχίσουμε με n τοποθετήσεις και για κάθε i, να επιλέξουμε τις k_i τοποθετήσεις που καταλαμβάνονται από αντικείμενα τύπου i. Αυτό είναι το ίδιο όπως το να διαμερίσουμε το σύνολο των $\{1,\ldots,n\}$ σε ομάδες μεγέθους $k_1,\ldots,k_r$ και το πλήθος αυτών των διαμερίσεων δίνεται από τον πολυωνυμικό συντελεστή.